Nivelación de Matemática

2018

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

Cecilia Gonzalez, Horacio Caraballo. La Plata noviembre de 2015.

Andrés Manceñido, editor y revisor 2017 y 2018.

Índice

1. Conjuntos numéricos

Objetivos: Repasar los conjuntos numéricos.

Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Números enteros negativos: $\{..., -3 - 2, -1\}$

Números enteros: $\mathbb{Z} = \{...., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Números racionales: $\mathbb{Q} = \{\text{enteros y fracciones}\}$
Las fracciones son números que se pueden escribir como cocientes m/n, donde m, n son enteros y n no es igual a cero. Por ejemplo $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{56}{22}, -\frac{23}{10}, ...$

Notación: Las expresiones $\frac{-2}{5}$ y $\frac{2}{-5}$ son equivalentes a la expresión $-\frac{2}{5}$, y esta última suele ser la más utilizada.

Aclaración: La expresión 1/0 no está definida. En otras palabras, no es posible dividir por cero.

Números reales: $\mathbb{R} = \{\text{racionales e irracionales}\}$
Los números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros, por ejemplo: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3}, ...$ se llaman *números irracionales.*

Podríamos representar a los números irracionales mediante decimales infinitos (no periódicos), como $\sqrt{2} = 1,414..., \pi = 3,14159...$, etc. Del mismo modo los racionales tendrían decimales infinitos (periódicos), como por ejemplo $3 = 3,000..., \frac{3}{4} = 0,7500..., \frac{1}{3} = 0,\widehat{3} = 0,3333..., \frac{371}{330} = 1,1\widehat{24} = 1,1242424...$, etc.

Los números reales se representan geométricamente como la colección de todos los puntos de una recta, eligiendo una unidad arbitraria.

2. Operaciones elementales

Objetivos: Repasar las propiedades y operaciones de los conjuntos numéricos, notación científica, unidades.

2.1. Propiedades de las potencias

Potencias naturales

1. Si a es un número real y n es un natural, entonces

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{(n \text{ veces})}} \\ \boldsymbol{a^1 = a \qquad\qquad a^0 = 1} \end{array}}$$

Ejemplos:

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ $\qquad (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$17^1 = 17$ $\qquad (-3)^1 = -3$ $\qquad 3^0 = 1$ $\qquad (-5)^0 = 1$

Notación: En matemática es importante el correcto uso de los paréntesis, ya que a veces la presencia (o ausencia) de los mismos puede simbolizar expresiones muy diferentes. Por ejemplo:

$(\mathbf{-2})^2 = (\mathbf{-2}) \cdot (\mathbf{-2}) = 4$ no es lo mismo que $-\,\mathbf{2}^2 = -\,\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = -4$

$\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^2 = \frac{4}{9}$ no es lo mismo que $\frac{\mathbf{2}^2}{3} = \frac{4}{3}$

2. Si a es un número real distinto de 0 y n es un entero, entonces **Potencias negativas**

$$\boxed{\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}}$$

Ejemplos:

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\qquad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ $\qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Nótese que en los dos últimos ejemplos se ve que elevar una fracción a una potencia negativa equivale a invertir la fracción y elevarla a una potencia positiva. Por ejemplo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

3. Si a es un número real y m y n son enteros cualesquiera, **Producto de potencias de igual base**

$$\boxed{\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}}$$

Ejemplos:

$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ $\qquad (-3)^4 \cdot (-3)^{-1} = (-3)^{4+(-1)} = (-3)^{4-1} = (-3)^3$

Cociente de potencias de igual base

4. Si a es un número real distinto de 0 y m y n son enteros cualesquiera,

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}}$$

Ejemplos:

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 \qquad \frac{2^3}{2^{-4}} = 2^{3-(-4)} = 2^{3+4} = 2^7$$

Potencia de potencia

5. Si a es un número real y m y n son enteros cualesquiera,

$$\boxed{\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}}$$

Ejemplos:

$$(3^2)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8 \qquad ((-2)^{-3})^2 = (-2)^{-3\cdot 2} = (-2)^{-6}$$

Distributiva respecto al producto

6. Si a y b son números reales y m es un entero,

$$\boxed{\boldsymbol{(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m}}$$

Ejemplos:

$$(3\cdot 7)^3 = 3^3\cdot 7^3 \qquad (8\cdot 4)^{-2} = 8^{-2}\cdot 4^{-2}$$

Notación: Muchas veces en matemática se omite el símbolo "·" de la multiplicación. De esta forma, por ejemplo, se podría escribir indistintamente:

$$(a\cdot b)^m \;\text{ o }\; (a\ b)^m \;\text{ o }\; (ab)^m$$

Distibutiva respecto al cociente

7. Si a y b son números reales ($b \neq 0$) y m es un entero,

$$\boxed{\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Aclaración: $(a+b)^m$ **no es igual a** $a^m + b^m$, del mismo modo $(a-b)^m$ **no es igual a** $a^m - b^m$ *(es decir que la potencia <u>no</u> es distributiva respecto de la suma o la resta)*

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2+3)^2 &\neq 2^2+3^2\\ 5^2 &\neq 4+9\\ 25 &\neq 13\end{aligned}$$

2.2. Propiedades de las raíces

Raíces y potencias del mismo orden

1. Para todo número real a, si k es un número natural,

   a) Si k es par:

   $$\boxed{\sqrt[k]{a^k} = |a|}$$

   donde $\quad |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad$ es el valor absoluto de a

   b) Si k es impar:

   $$\boxed{\sqrt[k]{a^k} = a}$$

   Ejemplos:

   $\sqrt[4]{3^4} = |3| = 3 \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 \qquad \sqrt{(b^2)} = |b|$

   $\sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \qquad \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$

Raíces como potencias fraccionarias

2. Para todo número real a no negativo con k un número natural cualquiera,

   $$\boxed{\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}}$$

   Ejemplos:

   $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

Esta propiedad permite extender las propiedades de la potencia a las raíces. Por ejemplo:

Raíces y potencias

3. Si a es un número real no negativo, k un número natural y m es cualquier entero:

   $$\boxed{\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m = a^{\frac{m}{k}}}$$

   Ejemplos:

   $\sqrt{5^3} = \left(\sqrt{5}\right)^3 = 5^{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt[4]{2^3} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{4}} \qquad \sqrt[5]{2^{-2}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^{-2} = 2^{-\frac{2}{5}}$

Distributiva respecto al producto

4. Si a y b son números reales no negativos y k es natural,

   $$\boxed{\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}}$$

   Ejemplos:

   $\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Distributiva respecto al cociente

5. Si a y b son números reales, b es distinto de 0 y k es un número natural,

$$\boxed{\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \qquad \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Aclaración: Muchas veces en matemática, cuando tenemos una expresión como la del último ejemplo (con una raíz en el denominador), se realiza una operación llamada **racionalización** para obtener una fracción equivalente, pero con denominador entero. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aclaración: Las **raíces pares de números negativos no están definidas** en el conjunto de los números reales. Por lo tanto, expresiones como $\sqrt{-2}$ o $\sqrt[4]{-5}$ no estarán definidas para nosotros.

Aclaración: $\sqrt[k]{a+b}$ **no es igual a** $\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b}$, del mismo modo $\sqrt[k]{a-b}$ **no es igual a** $\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}$ *(es decir que las raíces no son distributivas respecto de la suma o la resta)*

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt{4+9} &\neq \sqrt{4} + \sqrt{9} \\ \sqrt{13} &\neq 2+3 \\ \sqrt{13} &\neq 5 \end{aligned}$$

2.3. Notación científica

La notación científica es una manera de representar un número utilizando potencias de base diez. Se utiliza para poder expresar números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n \qquad \text{o} \qquad a \cdot 10^n \qquad \text{o} \qquad a\ 10^n$$

donde: a es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 o mayor que -10 y menor o igual que -1, que recibe el nombre de **coeficiente** y n es un número entero, que recibe el nombre de exponente u **orden de magnitud**.

Ejemplos:

$5,25\ 10^4 \qquad 6,023 \cdot 10^{23} \qquad -2,233\ 10^3 \qquad 9 \times 10^{-9}$

Aclaración: Expresiones como $12,05 \times 10^6$, $0,23\ 10^{-2}$ o $-34,55 \cdot 10^3$ no entrarían dentro de la definición formal de notación científica (ya que el coeficiente no cumple con los requerimientos que impone la definición), pero en la práctica podrían resultar igualmente útiles.

Algunas potencias de 10 .

Cuando los exponentes son mayores o iguales que cero .

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
$10^4 = 10000$
$10^5 = 100000$
$10^6 = 1000000$
$10^7 = 10000000$
$10^8 = 100000000$
$10^9 = 1000000000$
$10^{10} = 10000000000$
$10^{20} = 100000000000000000000$

Cuando los exponentes son menores que cero .

$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$
$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$
$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$
$10^{-4} = 1/10^4 = 0{,}0001$
$10^{-5} = 1/10^5 = 0{,}00001$
$10^{-10} = 1/10^{10} = 0{,}0000000001$
$10^{-20} = 1/10^{20} = 0{,}00000000000000000001$

Algunos datos en forma tradicional (aproximados)

La masa de la tierra es de 5980000000000000000000000 kg
La masa del electrón es de $0,000000000000000000000000000000911$ kg
El número de Avogadro es 602000000000000000000000 partículas/mol
La velocidad de la luz en el vacío es 299790000 m/s
La longitud de una célula típica es $0,000050$ m
La longitud de onda de la luz amarilla es $0,000000589$ m

Los datos anteriores expresados en notación científica .

La masa de la tierra es 5,98 10^{24} kg
La masa del electrón es 9,11 10^{-31} kg
El número de Avogadro es 6,02 10^{23} partículas/mol
La velocidad de la luz en el vacío es 2,9979 10^8 m/s
La longitud de una célula típica es 5 10^{-5} m
La longitud de onda de la luz amarilla es 5,89 10^{-7} m

2.3.1. Producto y cociente de números expresados en notación científica

La notación científica es especialmente práctica a la hora de realizar productos o cocientes de números expresados de esta forma, ya que se opera por un lado con los coeficientes (realizando la operación adecuada) y por otro lado con las potencias de 10 (utilizando las propiedades de la potencia).

$$4,3\ 10^3 \cdot 2\ 10^5 = 8,6\ 10^8 \qquad \frac{8,1\ 10^{-6}}{3\ 10^2} = 2,7\ 10^{-8}$$

2.3.2. Suma y resta de números expresados en notación científica

Exponentes iguales Si se suman números del mismo orden de magnitud:

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 1 y menor que 10 (o mayor que -10 y menor o igual que -1) se mantiene el mismo orden de magnitud

  $$3,2\ 10^{12} + 4,9\ 10^{12} = 8,1\ 10^{12}$$
  $$8,9\ 10^{-10} - 2,7\ 10^{-10} = 7,2\ 10^{-10}$$
  $$-1,4\ 10^{3} - 2,5\ 10^{3} = -3,9\ 10^{3}$$

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 10 (o menor o igual que -10 o se encuentra entre -1 y 1), se convierte el coeficiente a notación científica sumando el orden de magnitud del coeficiente al orden de magnitud original.

  $$3,2\ 10^{12} + 8,9\ 10^{12} = 12,1\ 10^{12} = 1,21\ 10^{1}\ 10^{12} = 1,21\ 10^{13}$$
  $$5,2\ 10^{-3} - 6\ 10^{-3} = -0,8\ 10^{-3} = -8\ 10^{-1}\ 10^{-3} = -8\ 10^{-4}$$

Exponentes distintos Se expresan los números con el orden de magnitud mayor y se suman los coeficientes como en los casos anteriores.

$$4\ 10^6 + 3\ 10^8 = 0,04\ 10^8 + 3\ 10^8 = 3,04\ 10^8$$
$$5\ 10^{-7} - 4\ 10^{-8} = 5\ 10^{-7} - 0,4\ 10^{-7} = 4,6\ 10^{-7}$$
$$3,2\ 10^{-7} - 5,9\ 10^{-5} = 0,032\ 10^{-5} - 5,9\ 10^{-5} = -5,868\ 10^{-5}$$
$$9,9\ 10^{5} + 3\ 10^{4} = 9,9\ 10^{5} + 0,3\ 10^{5} = 10,2\ 10^{5} = 1,02\ 10^{6}$$

2.3.3. Prefijos

Los prefijos del Sistema Internacional (SI) se usan para nombrar a los múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad, ya sean unidades básicas o derivadas. Estos prefijos se anteponen al nombre de la unidad para indicar el múltiplo o submúltiplo decimal de la misma. Los símbolos de los prefijos se anteponen a los símbolos de las unidades.

Los prefijos pertenecientes al SI los fija oficialmente la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures), de acuerdo con el cuadro siguiente:

Múltiplos y submúltiplos de unidades

Potencias positivas de 10

Factor que multiplica a la unidad	Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
1000000000000000000000000	10^{24}	yotta	Y
1000000000000000000000	10^{21}	zetta	Z
1000000000000000000	10^{18}	exa	E
1000000000000000	10^{15}	peta	P
1000000000000	10^{12}	tera	T
1000000000	10^{9}	giga	G
1000000	10^{6}	mega	M
1000	10^{3}	kilo	k
100	10^{2}	hecto	h
10	10^{1}	deca	da

Potencias negativas de 10

Factor que multiplica a la unidad	Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
$0,1$	10^{-1}	deci	d
$0,01$	10^{-2}	centi	c
$0,001$	10^{-3}	mili	m
$0,000001$	10^{-6}	micro	μ
$0,000000001$	10^{-9}	nano	n
$0,000000000001$	10^{-12}	pico	p
$0,000000000000001$	10^{-15}	femto	f
$0,000000000000000001$	10^{-18}	ato	a
$0,000000000000000000001$	10^{-21}	zepto	z
$0,000000000000000000000001$	10^{-24}	yocto	y

Ejemplos:

Masa de la tierra: 5,98 $10^{27}\,g$ o utilizando el prefijo yotta es 5,98 $10^{3}\,Yg$

Velocidad de la luz en el vacío: 2,9979 $10^{8}\,m/s$ o utilizando el prefijo mega es 299,79 Mm/s

Longitud de una célula típica: 5 $10^{-5}\,m$ o utilizando el prefijo micro es 50 μm

Longitud de onda de la luz amarilla: 5,89 $10^{-7}\,m$ o utilizando el prefijo nano es 589 nm

2.3.4. Conversión de unidades

A veces suele ser necesario convertir una medida de una unidad a otra. Veremos ahora diferentes formas de realizar estas conversiones de unidades y como trabajar con unidades lineales, cuadráticas y cúbicas.

Conversión de unidades lineales comparando órdenes de magnitud

Unidades lineales Cuando se trata de múltiplos o submúltiplos de una misma unidad lineal (por ejemplo de mm a nm o de ml a cl) una forma de trabajar puede ser comparando los órdenes de magnitud (las potencias de 10) de ambos múltiplos y así obtener una equivalencia entre las mismas.

Supongamos, por ejemplo, que queremos expresar en km una medida de 27 cm. Como el prefijo k (kilo) corresponde a 10^3 y en prefijo c (centi) corresponde a 10^{-2}, eso quiere decir que existen 5 órdenes de magnitud de diferencia entre los dos múltiplos. Ahora bien, como k (kilo) es mayo que c (centi), eso quiere decir que 1 km equivale a $10^5\,cm$ (o 1 cm equivale a $10^{-5}\,km$). Por lo tanto:

$$27\,\boldsymbol{cm} = 27\ \mathbf{10^{-5}}\,\boldsymbol{km} = 2,7\ 10^{-4}\,km$$

Conversión de unidades lineales utilizando factores de conversión

Otra forma de trabajar sería utilizando factores de conversión. Este método también requiere conocer una equivalencia entre las dos unidades que se quieren convertir, pero esta vez se multiplicará la medida original por una fracción que tendrá en cuenta dicha equivalencia. El numerador de esta fracción constará de la unidad a la que se quiere llegar y el denominador constará de la unidad de la que se parte, de forma que las unidades se simplifiquen. Utilizando el mismo ejemplo anterior:

$$27\,cm = 27\,\cancel{cm}\cdot\frac{1\,km}{10^5\,\cancel{cm}} = 27\ 10^{-5}\,km = 2,7\ 10^{-4}\,km$$

Este método es de especial utilidad cuando las unidades que se desean convertir no están relacionadas entre sí por potencias de 10 (como por ejemplo de horas a segundos o de pulgadas a cm), o cuando las unidades son combinadas (por ejemplo de km/h a m/s o $\frac{g}{cm\ s}$ a $\frac{kg}{m\ s}$). En este último caso se usará una fracción por cada unidad que se quiera convertir y la posición de las unidades dentro de cada fracción será de forma tal que las unidades originales se cancelen.

Ejemplos:

45 s a h $$45\,s = 45\,\cancel{s}\cdot\frac{1\,h}{3600\,\cancel{s}} = \frac{45}{3600}\,h = 0,0125\,h$$

50 m/s a km/h $$50\,\frac{m}{s} = 50\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}\cdot\frac{1\,km}{10^3\,\cancel{m}}\cdot\frac{3600\,\cancel{s}}{1\,h} = \frac{180000\,km}{10^3\,h} = 180\,\frac{km}{h}$$

Conversión de unidades cuadráticas o cúbicas

Unidades cuadráticas o cúbicas Cuando se trate de unidades cuadráticas o cúbicas se hará la conversión de la unidad lineal (con alguno de los métodos explicados anteriormente) y luego se elevará ese resultado a la potencia adecuada.

Ejemplos:

5 cm^2 a m^2 $$5\,\boldsymbol{cm}^2 = 5\,(\mathbf{10^{-2}}\,\boldsymbol{m})^2 = 5\,(10^{-2})^2\,m^2 = 5\ 10^{-4}\,m^2$$

3 m^3 a mm^3 $$3\,m^3 = 3\,m^3\cdot\left(\frac{1\,mm}{10^{-3}\,m}\right)^3 = 3\,\cancel{m^3}\cdot\frac{1^3\,mm^3}{(10^{-3})^3\,\cancel{m^3}} = 3\ 10^9\,mm^3$$

Aclaración: Cuando se tenga que pasar unidades de volumen de dos sistemas de medición distintos (como por ejemplo de l a m^3 o de cm^3 a ml) se hará el pasaje como si las unidades fueran lineales, usando alguna de las siguientes equivalencias:

$$1000\,cm^3 \text{ —— } 1\,l \ ;\ 1\,m^3 \text{ —— } 1000\,l \ ;\ 1\,cm^3 \text{ —— } 1\,ml \ ;\ 1\,dm^3 \text{ —— } 1\,l$$

2.4. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Realizar las siguientes operaciones con números racionales

   a) $1-(1-(1-(1+1)))$ b) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$ d) $\left(\frac{2}{3}-2\right)+\left(3-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{5}{3}-4\right)$

   e) $\left(\frac{8}{7}-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{9}$ f) $\dfrac{\frac{8}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$ g) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{11}+3\right)-2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$

2. Calcular:

   a) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{6}{7}:\frac{6}{21}-1\right)\frac{1}{2}+\frac{3}{7}:\frac{2}{14}-30\cdot 10^{-1}$

   c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right](2^{-2}+2^{-1})$ d) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right)\div\left(\frac{2}{5}-2\right)}$

3. Realizar las siguientes operaciones en un solo paso utilizando la calculadora

   a) $2+\frac{5}{3}$ b) $\frac{2+5}{3}$ c) $\frac{2}{5+3}$ d) $\frac{2}{5}+3$ e) $(17-5)^2$ f) $17-5^2$

4. Multiplicar o dividir y simplificar

   a) $6^2\cdot 6^5$ b) $8^{-3}\cdot 8^4$ c) $b^3\cdot b^{-8}$ d) $(3x^5)(5x^{-3})$ e) $(2^{-1}x^4y^{-6})(8x^{-3}y^6)$

   f) $\frac{7^4}{7^6}$ g) $\frac{4^5}{4^{-6}}$ h) $\frac{(a\,b)^4}{a^{-5}\,b^4}$ i) $\frac{12h^8}{-4h^{-4}}$ j) $\frac{7k^8z^{-4}}{-4(k^{-4})^3z^{-5}}$ k) $\frac{(2a^7v^8)(5^{-1}a^3v^{-3})}{(5a^5v^3)(2^{-1}a^8v^{-6})}$

5. Calcular o simplificar

   a) $-\sqrt{\frac{49}{36}}$ b) $\sqrt{\frac{81}{144}}$ c) $\sqrt{(-6b)^2}$ d) $-\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[7]{c^7}$ f) $-\sqrt[5]{-243}$

   g) $-\sqrt[5]{243}$ h) $-\sqrt[4]{81}$ i) $\sqrt[3]{\frac{27y^5}{343x^3}}$ j) $\sqrt[4]{\frac{y^8}{16a^4y^4}}$ k) $\sqrt{\frac{4z^6w^{-3}}{9z^{-8}w^{-1}}}$

   l) $\sqrt[3]{\frac{3a^6u^{-1}}{81a^3u^{-3}}}$ m) $(2\cdot 2^{1/3}):2^{1/6}$ n) $\left[\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

6. Calcular

   a) $\left(\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{9}}+\frac{1}{5}\right)\div\frac{16}{3}$ b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+2\sqrt{2}$

   d) $\left[(5-2)\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-2\right]\frac{5}{4}\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{7}\left(\frac{4}{28}\right)^{-1}-1\right]$

7. Realizar las siguientes operaciones en un solo paso utilizando la calculadora

   a) $\sqrt{30^2+10^2}$ b) $\sqrt{30^2}+10^2$ c) $\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{12}}{5}$ e) $\dfrac{\sqrt{13\cdot 7}}{2}$

8. Escribir en notación científica los siguientes números

a) 2000	b) 50000	c) 30000000	d) 0,12	e) 0,00015
f) 2324	g) 240000	h) 0,004	i) 234	j) 0,00444
k) 12,22	l) 12	m) 0,0003	n) - 23	ñ) - 0,0000045
o) 1,0005	p) 289,6	q) 0,2	r) - 0,51	s) 0,03004

9. Realizar las siguientes operaciones, expresar el resultado en notación científica

a) $10\ 10^3$	b) $3\ 10^4/10^2$	c) $4\ 10^{-2}/2\ 10^{-8}$
d) 10^4+10^3	e) $10^4 10^4$	f) $10\ (10^3+10^5)$
g) $10^2 10^5 10^3$	h) $12\ 10^5/3000$	i) $34\ 10^5\ 2\ 10^{-4}$
j) $-5,3\ 10^{14}-4\ 10^{12}$	k) $(0{,}0003\ 10^3+2\ 10^{-1})^3$	l) $21\ 10^3\ 2\ 10^{-3}$

10. Realizar las operaciones del inciso anterior utilizando la calculadora

11. Realizar las siguientes conversiones de unidades

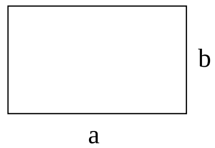
a) 2,3 cm a m	b) 25 mm a m	c) 325 cm a dm
d) $2\ 10^4$ m a km	e) 16 μm a m	f) 250 km a m
g) 455 kg a hg	h) 14 mg a μg	i) 8 ng a μg
j) 3,5 Mg a μg	k) 789 kg a cg	l) 5,5 dg a hg
m) $7{,}9\ 10^{-8}$ Gs a ms	n) 0,14 ks a cs	ñ) 48 μs a Ts

12. Realizar las siguientes conversiones de unidades

a) 28 cm^2 a m^2	b) 5 m^2 a cm^2	c) 625 cm^2 a dm^2
d) $12\ 10^4$ m^2 a km^2	e) 81 μm^2 a m^2	f) 50 km^2 a m^2
g) 5 m^3 a cm^3	h) 1000 cm^3 a mm^3	i) 18 nm^3 a m^3
j) 8,5 km^3 a cm^3	k) 7 dm^3 a cm^3	l) 4,2 m^3 a l
m) $2{,}9\ 10^2$ mm^3 a l	n) 300 l a m^3	ñ) 400 ml a m^3
o) 2400 kg/m^3 a g/cm^3	p) 72 km/h a m/s	q) 75 m/s a km/h

3. Perímetros, áreas y volúmenes

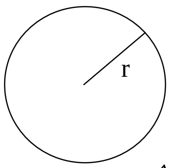
Perímetros, áreas y volúmenes de algunos objetos geométricos básicos:



Rectángulo

Área $A = a\,b$

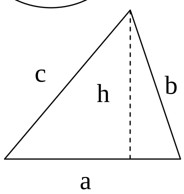
Perímetro $P = 2a + 2b$



Circunferencia

Área $A = \pi\, r^2$

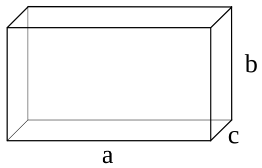
Perímetro $P = 2\pi\, r$



Triángulo

Área $A = (ah) / 2$

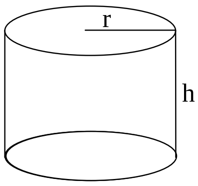
Perímetro $P = a + b + c$



Paralelepípedo rectangular recto

Área exterior $A = 2ab + 2ac + 2bc$

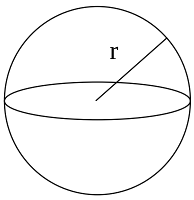
Volumen $V = abc$



Cilindro

Área exterior $A = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$

Volumen $V = \pi\, r^2\, h$

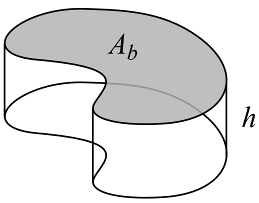


Esfera

Área exterior $A = 4\pi\, r^2$

Volumen $V = 4/3\ \pi\, r^3$

Aclaración: El **volumen V de un cuerpo de sección transversal constante** en toda su altura se puede calcular fácilmente como el **producto del área de la base A_b por su altura h**



$$\boxed{\boldsymbol{V = A_b \cdot h}}$$

3.1. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Resolver los siguientes problemas

   a) Hallar el área de un triángulo cuya base es de 1,5 m y su altura es de 4 m.

   b) ¿Cuál es el radio de una circunferencia de $5\pi\, cm$ de perímetro?

   c) ¿Cuánto vale el perímetro de un cuadrado cuya área es de 9 m^2?

   d) Hallar el volumen de una caja de 2 dm de largo, 10 cm de ancho y 0,12 m de alto.

   e) ¿Qué altura tiene una caja de 3 l de capacidad, cuya base mide 20 cm por 15 cm?

   f) ¿Cuántos m^3 de tierra hay en los primeros 5 cm de suelo de un terreno de 100 hectáreas (1 hectárea = 1 hm^2)?

   g) ¿Qué superficie tendrá la base de un bloque de hielo de 10 cm de espesor, cuyo volumen es de 2 m^3?

   h) ¿Cuántos litros de agua caen en un terreno de 2000 m^2 de superficie durante una lluvia en la que caen 15 mm de agua?

2. Resolver los siguientes ejercicios utilizando la calculadora

   a) Hallar el perímetro de una circunferencia de radio 10 cm. Expresarla en m utilizando la notación científica.

   b) Hallar el área del circulo que encierra la circunferencia anterior. Expresarla en m^2.

   c) ¿Cuántos litros de agua recolecta un tanque australiano de 5 m de diámetro durante una precipitación de 20 mm?

   d) Hallar la arista de un cubo cuyo volumen es de 27 cm^3.

   e) Hallar la superficie exterior del cubo anterior. Expresarlo en m^2.

   f) Calcular la altura de un cilindro, en m, si su superficie exterior es de $2\,m^2$ y el radio de su base es de $20\,cm$.

   g) Hallar el volumen del espacio comprendido entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 6\ cm$ y $r_2 = 9\ cm$. Expresarlo en m^3 utilizando la notación científica.

   h) Dos cilindros coaxiales tienen la misma altura igual a 2 m y los radios de 3 mm y 6 mm. Calcular el volumen comprendido entre los dos cilindros en cm^3

4. Ecuaciones lineales

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de ecuaciones lineales y su aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

4.1. Definición

Una ecuación es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas. El origen de las ecuaciones debe verse en ciertos problemas surgidos tanto de una situación de interés real como planteados para entretenimiento; ambos casos poseen remotos antecedentes históricos. El afán por resolver estos problemas, ya por necesidad, ya como diversión, llevó paulatinamente a la idea fundamental: introducir cantidades desconocidas y someterlas a las leyes de la aritmética, considerando que son número a conocer. Ilustremos esta idea con un problema que data de principios del siglo $XVII$, y que dice así:

A un criado se le ha prometido la suma de 100 *pesos más una capa como sueldo anual. Al cabo de* 7 *meses el criado se va, y recibe como pago total la capa y* 20 *pesos. ¿Cual es el precio de la capa?.*

La cantidad desconocida es el valor de la capa; por comodidad designemos con c dicha cantidad; c es un número a conocer.

$\dfrac{c+100}{12}$ es el sueldo mensual prometido,

$\dfrac{7(c+100)}{12}$ es el sueldo por los 7 meses trabajados

$c+20$ es lo pagado por esos 7 meses.

Luego:

$$\frac{7(c+100)}{12} = c + 20$$

El problema ha quedado reducido a encontrar un número c que verifique la igualdad anterior. Observemos que, para obtener la ecuación, hemos operado con c como si fuera un número (por ejemplo: le sumamos 100 al resultado lo dividimos por 12, etc.).

Vemos entonces que, originado en la solución de problemas como el anterior, aparece el interés por conocer métodos que permitan resolver las ecuaciones. Se sabe por ejemplo que la resolución de ecuaciones sencillas como la anterior, era conocida por culturas tan antiguas como la egipcia (aunque carecían del simbolismo adecuado que actualmente utilizamos). Este estudio, llevado a cabo durante siglos, es lo que se conoce con el nombre de Álgebra.

4.2. Resolución de ecuaciones

La **solución de una ecuación** es un número x_0 tal que al reemplazar la incógnita por x_0 en la ecuación se obtenga una identidad numérica.

El procedimiento básico para tratar una ecuación está basado en la idea mencionada anteriormente: la incógnita es un número -actualmente desconocido- que se quiere identificar.

Es posible entonces pensar que una ecuación es una igualdad entre números ; serán válidas, en consecuencia, las propiedades de dicha igualdad:

Sumando (o restando) a ambos miembros de una igualdad un mismo número se obtiene otra igualdad.

Multiplicando (o dividiendo) ambos miembros de una igualdad por un número (en el caso de dividir, no nulo) se obtiene otra igualdad.

Usaremos estas reglas para transformar una ecuación en otra que tenga las mismas soluciones, pero cuya resolución sea más sencilla. Veamos un ejemplo:

$3x + 1 = 2 - x$

Sumando x a ambos miembros obtenemos la ecuación : $4x + 1 = 2$ que tiene las mismas soluciones que la anterior.

Restando 1 de ambos miembros obtenemos: $4x = 1$ y, finalmente, dividiendo por 4 ambos miembros: $x = \frac{1}{4}$

Por lo tanto $\frac{1}{4}$ es la solución de la ecuación original.

Lo que hemos hecho es transformar sucesivamente la ecuación con el fin de *despejar* la incógnita.

Llamaremos **ecuaciones equivalentes** a aquellas que poseen las mismas soluciones. Por ejemplo, las sucesivas ecuaciones obtenidas en el ejemplo anterior son equivalentes.

Las reglas básicas que permiten transformar una ecuación en otra equivalente son las siguientes:

Reglas para la obtención de ecuaciones equivalentes

Regla 1: **Sumando o restando a ambos miembros de una ecuación una misma cantidad**, se obtiene una ecuación equivalente.

Regla 2: **Multiplicando o dividiendo ambos miembros, de una ecuación por una misma cantidad no nula**, se obtiene una ecuación equivalente.

4.3. Ecuaciones de primer grado o lineales

Cierto tipo de ecuaciones se resuelven utilizando exclusivamente las dos reglas enunciadas más arriba; son las llamadas **ecuaciones lineales** y tienen la forma:

$$ax = b$$

o una equivalente a ella.

4.3.1. Soluciones de una ecuación lineal

Las ecuaciones lineales pueden tener **solución única**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

Una ecuación lineal puede tener una **solución única**, por ejemplo:
$-3x = 2(x-1)+4$
$-5x = 2$

$-\dfrac{2}{5}$ es **la solución de la ecuación**.

Una ecuación lineal puede tener **infinitas soluciones**, por ejemplo:
$3x-10 = 2(3x-5)-3x$
$3x-10 = 6x-10-3x$
$3x-10 = 3x-10$
$0 = 0$
Cualquier número reemplazado en la incógnita la convierte en una identidad numérica. Por lo tanto **la ecuación tiene infinitas soluciones** (que en este caso son todos los números reales).

Una ecuación lineal puede **no tener solución**, por ejemplo:
$-3x-8 = 2(x-1)-5x$
$-3x-8 = 2x-2-5x$
$-3x-8 = -3x-2$
$0 = 6$ contradicción
No existe ningún número que reemplazado en la ecuación la convierta en una identidad numérica. Luego, **la ecuación no tiene solución**.

4.4. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Resolver las siguientes ecuaciones (si tienen solución) y, en el caso que existan, verificar las soluciones obtenidas

   a) $10-2x = x-1$ b) $8x+x-1 = -2x+1$ c) $\dfrac{x}{2}-x = -3x+1$

   d) $3(x+5) = -\dfrac{3}{4}(-4x+7)$ e)$(2-x)(3-x) = (1-x)(5-x)$

   f) $x+2 = -(3-x)+5$ g) $2(x-2)-(3x+1)-\dfrac{2(x+1)}{4} = 3(2-x)$

2. Se sabe que la ecuación : $(2a-1)(x+1)+x = a$, tiene por solución $x = -2$. ¿Cuál es el valor de a?

3. ¿Cuál es el número cuya tercera parte sumada a su quinta parte es igual a 40?

4. ¿A qué número hay que sumarle $5/2$ para que la suma sea igual a su tercera parte?

5. Un padre tiene 30 años y su hijo 2. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el padre tenga 8 veces la edad de su hijo?

6. Una persona recibe un aumento de $10\,\%$ en su salario, alcanzando un ingreso de $\$\,13200$ mensuales. ¿Cuál era su salario antes del aumento?

7. En una oferta, un local de venta de artículos deportivos redujo el precio de unas zapatillas en un $20\,\%$ hasta alcanzar un precio de $\$\,560$. ¿Cuál era el precio original?

5. Ecuaciones de segundo grado

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas. Aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

5.1. Definición

Son ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ o cualquier otra ecuación equivalente a ella.

5.2. Método de completación de cuadrados

La idea fundamental de este método consiste en ver que esta ecuación se puede escribir usando el desarrollo del cuadrado de un binomio.

Ejemplo 1:

Sea la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Los términos $x^2 - 4x$ pueden considerarse como parte del desarrollo del cuadrado:
$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
es decir: $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$
por lo tanto la ecuación se puede escribir: $(x-2)^2 - 4 - 5 = 0$ o sea:
$(x-2)^2 - 9 = 0$
de donde:
$x - 2 = \pm 3$
las soluciones son dos:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 5$$

5.2.1. Forma general

El método es general, si consideramos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

Sacamos a como factor común: $\quad a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = 0$

Sumamos y restamos dentro del paréntesis la cantidad positiva: $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c = 0$$

Agrupamos convenientemente:

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Operando:

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Pasamos a dividiendo (pues $a \neq 0$)

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Fórmula de Bhaskara

$$\boxed{\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

(llamada fórmula de Bhaskara)

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es un número real positivo; para que existan soluciones reales en una ecuación cuadrática tiene que cumplirse que $b^2-4ac \geq 0$.

Ejemplos:

1) Decir si existen soluciones para las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $6x^2-5x+1=0$

Como $a=6$; $b=-5$ y $c=1$ en esta ecuación $b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1=1>0$. Las dos soluciones son:

$x_1=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$

b) $4x^2+4x+5=0$

Como $a=4$; $b=4$ y $c=5$ en esta ecuación $b^2-4ac=4^2-4\cdot 4\cdot 5=-64<0$. La ecuación no tiene solución en los números reales.

c) $4x^2-4x+1=0$

Como $a=4$; $b=-4$ y $c=1$ en esta ecuación $b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0$. La ecuación tiene una sola solución en los números reales.

$x_1=x_2=\frac{4+0}{8}=\frac{1}{2}$

2) ¿Cuál es el número natural que sumado al cuadrado de su consecutivo da 109?

Si Si n es un número natural; su consecutivo es $n+1$, entonces:

$n+(n+1)^2=109$

$n+n^2+2n+1=109$

$n^2+3n-108=0$

Cuyas soluciones son: $\quad n_1=9 \qquad n_2=-12$; pero como n debe ser número natural, la solución del problema es $n=9$

5.3. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Utilizando el método de completación de cuadrados, resolver las ecuaciones
   a) $x^2 + 4x + 2 = 0$ b) $x^2 - 16x + 39 = 0$ c) $x^2 - 10x + 5 = 20$

2. Resolver las siguientes ecuaciones
   a) $x^2 - 3x - 70 = 0$ b) $3x^2 + 6x - 36 = 0$ c) $-2x^2 - 2x - 10 = 0$
   d) $5(1 - x^2) = -10(x + 1)$ e) $(2x + 3)(2x - 3) = 9(x - 1)$
   f) $2(1 - x) + (x - 1)^2 = 2 - x$ g) $3x^2 + 3 - 5x = x + 2x^2 - 6$

3. Hallar el/los números tales que su cuadrado sea igual a su opuesto.

4. ¿Cuál es el número natural tal que la mitad del producto por su consecutivo es igual a 15?

5. La cuarta parte de un número, multiplicada por ese número aumentado en dos unidades, es igual a seis veces y media dicho número. ¿Cuál es el/los números que cumplen esa condición?

6. La superficie de un rectángulo es de 108 cm^2. Sabiendo que uno de los lados es igual a los 4/3 del otro, calcular las dimensiones del rectángulo.

7. La superficie de un triángulo es de 60 cm^2. ¿Cuánto mide la altura, sabiendo que tiene 2 cm más que la base?

8. Calcular el/los números que sumados a su cuadrado dan como resultado treinta.

9. Encontrar tres números naturales consecutivos cuyos cuadrados sumen 77.

6. Polinomios

Objetivos: Efectuar correctamente operaciones con polinomios.

6.1. Definición

Se llaman polinomios a las expresiones de la forma:
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ donde los $a_0,\ a_1, ..., a_n$ son elementos, por ejemplo, del conjunto de los números reales, llamados **coeficientes**, x es una indeterminada, y los exponentes de la indeterminada x son todos enteros no negativos.

Grado y coeficiente principal

Si $a_n \neq 0$ diremos que el **grado** de $P(x)$ es n (es decir la mayor potencia a la que aparece elevada la indeterminada x). A este coeficiente a_n lo llamaremos **coeficiente principal** (es decir el coeficiente del término de mayor grado) y lo denotaremos generalmente como C_p.

Término independiente

Llamaremos **término independiente** al término de grado 0 (es decir el término donde no aparece la indeterminada x).

Aclaración: Es importante para estas definiciones que los polinomios sean escritos de forma que haya **a lo sumo un término de cada grado**.

Llamaremos **polinomio nulo** al polinomio: $0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$. El polinomio nulo no tiene grado.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no nulos, diremos que son iguales si y solo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

El polinomio **opuesto** de $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ es
$-P(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 + ... - a_nx^n$

6.2. Operaciones con polinomios

6.2.1. Suma

La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene agrupando los términos del mismo grado y sumando sus coeficientes.

Ejemplo:
Si $P(x) = 1 + x - 5x^2 + 7x^5$ y $Q(x) = 2 - x - 12x^2 + 3x^3 - x^4$ entonces:

$P(x) + Q(x) = 3 - 17x^2 + 3x^3 - x^4 + 7x^5$

La **diferencia** entre $P(x)$ y $Q(x)$ es equivalente a sumar a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$. Es decir: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$.

6.2.2. Producto

La multiplicación de polinomios se define de modo tal que satisfaga la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base, para la indeterminada x, la conmutatividad de x con los números reales y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Ejemplo:
Si $P(x) = 1 + x - 5x^2 + 7x^5$ y $Q(x) = 2 - x - 12x^2$ entonces:

$$\begin{aligned}
&P(x) \cdot Q(x) = (1 + x - 5x^2 + 7x^5) \cdot (2 - x - 12x^2) = \\
&\quad = (2 - x - 12x^2) + x(2 - x - 12x^2) - 5x^2(2 - x - 12x^2) + 7x^5(2 - x - 12x^2) \\
&\quad = 2 - x - 12x^2 + 2x - x^2 - 12x^3 - 10x^2 + 5x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7 \\
&\quad = 2 - x + 2x - 12x^2 - x^2 - 10x^2 - 12x^3 + 5x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7 \\
&\quad = 2 + x - 23x^2 - 7x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7
\end{aligned}$$

6.2.3. División

Dados dos polinomios $P(x)$ (**dividendo**) y $D(x)$(**divisor**) con $D(x) \neq 0(x)$, es posible determinar $C(x)$ y $R(x)$ tal que:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

siendo el grado de $R(x)$ menor que el grado de $D(x)$ o bien $R(x) = 0$. $C(x)$ se llama **polinomio cociente** y $R(x)$ **resto**.

Si $R(x) = 0$, entonces $P(x) = D(x) \cdot C(x)$ y se dice que $P(x)$ es **divisible** por $D(x)$.

Ejemplo:
$P(x) = 2x^3 - x + 1$ y $D(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^3 + 0x^2 & - x & + 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
- & 2x^3 - 2x^2 & + 2x & & 2x + 2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & - 3x & + 1 & \\
- & 2x^2 & - 2x & + 2 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & - 1 &
\end{array}$$

En este caso el dividendo es $P(x) = 2x^3 - x + 1$; el divisor es $D(x) = x^2 - x + 1$; el cociente es $C(x) = 2x + 2$ y el resto es $R(x) = -x - 1$

Por lo tanto:

$$\underbrace{2x^3 - x + 1}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{divisor}}\underbrace{(2x + 2)}_{\text{cociente}} + \underbrace{(-x - 1)}_{\text{resto}}$$

6.2.4. Regla de Ruffini

Es un procedimiento que permite hallar el cociente y el resto en **el caso en que el divisor sea un polinomio de la forma $\boldsymbol{x-a}$** .

Sean $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ y $D(x) = x + 2$

Regla de Ruffini

Coeficientes del dividendo →		**2**	**-4**	**0**	**5**
Opuesto del término independiente del divisor →	**-2**		-4	16	-32
		2	-8	16	$\boxed{-27}$

Se baja el primer coeficiente. Los restantes se obtienen multiplicando el anterior por el número que se escribe en el ángulo izquierdo y se coloca a continuación en la segunda fila, luego se suman primera y segunda fila. El número recuadrado es el **resto**. Los demás números son los coeficientes del **cociente**, el cual será un polinomio de un grado menos que el dividendo. Por lo tanto el cociente es $2x^2 - 8x + 16$.

Por lo tanto: $\quad 2x^3 - 4x^2 + 5 = (x+2)(2x^2 - 8x + 16) - 27$

6.2.5. Valor numérico

Si a es un número real cualquiera, se llama **valor numérico** $P(a)$ de un polinomio $P(x)$ al número que se obtiene sustituyendo el valor a en lugar de x y efectuando los cálculos.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^2 - 3x + 6 \qquad P(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 6 = 20$

6.2.6. Raíz o cero de un polinomio

Raíz de un polinomio

El número a se llama **raíz o cero** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Ejemplo:
Los números $0;\ -1;\ 1$ son raíces de $P(x) = x^3 - x$ puesto que:
$P(0) = 0^3 - 0 = 0 \qquad P(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0 \qquad P(1) = 1^3 - 1 = 0$

6.2.7. Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$, por otro de la forma $x - a$ es igual a $P(a)$.

Ejemplo:
El resto de dividir $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ por $x + 2$ es
$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 1 = -13$

Observación: Si a es raíz de $P(x)$, por el teorema del resto sabemos que el resto de dividir a $P(x)$ por $(x-a)$ será 0 ya que $P(a) = 0$ y por lo tanto $P(x) = (x-a) \cdot C(x)$ Entonces se dice que $P(x)$ **es divisible por** $x - a$ o que $P(x)$ **es múltiplo de** $x - a$.

Ejemplo:
$P(x) = x^3 + 4x + 16$ con $a = -2$
$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2) + 16 = 0$
Como -2 es raíz de $P(x)$ dividiendo $P(x)$ por $x + 2$ usando la Regla de Ruffini

	1	**0**	**4**	**16**
-2		-2	4	-16
	1	-2	8	$\boxed{0}$

Entonces $x^3 + 4x + 16 = (x + 2)(x^2 - 2x + 8)$

6.3. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

Dados los siguientes polinomios

$P_1 = x - 3$ $\quad P_2 = x + 4$ $\quad P_3 = x^2 + 2x$ $\quad P_4 = -3x^2 + 2$
$P_5 = x^3 + 2$ $\quad P_6 = x^4 - 4$ $\quad P_7 = x^3 + 2x^2$
$P_8 = 3x^4 + 2x^3 - 5x - 1$ $\quad P_9 = x^5 - 7x^3 + 5x - 6$

1. Resolver las siguientes operaciones de polinomios
   a) $P_3 + P_4$ b) $P_8 + P_9$ c) $P_9 - P_8$ d) $P_7 - P_4$
   e) $P_1 \cdot P_2$ f) $P_7 \cdot P_3$ g) $P_5 \cdot P_6$ h) $P_3 \cdot P_8$
2. Encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones. En caso de ser posible utilizar la regla de Ruffini
   a) P_8/P_7 b) P_9/P_2 c) P_8/P_6 d) P_6/P_3
   e) P_9/P_1 f) P_9/P_5 g) P_6/P_1 h) P_4/P_2
3. Calcular los siguientes valores numéricos
   a) $P_2(-1)$ b) $P_4(2)$ c) $P_3(-2)$ d) $P_8(-1)$ e) $P_6(3)$
4. Calcular, usando el teorema del resto, el resto de las divisiones del ejercicio 2) en los casos que sea posible.
5. Calcular las raíces reales de los siguientes polinomios
   a) $x - 8$ b) $x + 15$ c) $2x^2 - x - 1$ d) $x^2 - 4$ e) $x^2 + 4$ f) $x^3 + 8$

7. Factorización de expresiones algebraicas

Objetivos: Factorizar correctamente expresiones algebraicas.

7.1. Definición

Llamaremos **expresiones algebraicas** a expresiones compuestas por números y letras relacionadas entre si por las operaciones básicas.

Ejemplo:
$bt^6 - b^4t^3 + 5b + 2bt - 2$ es una expresión algebraica.

7.2. Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla como producto de expresiones algebraicas **mas sencillas**.
Por ejemplo: la expresión $2x^2 + 4ax$ se puede escribir como $2x(x + 2a)$.

7.2.1. Factor Común

En este caso se separa en términos y se extraen los factores comunes que están en todos los términos.
Ejemplos:
$7x^3 - 49x^2 = \boxed{7x^2(x - 7)}$
$b^3a^2 - 2b^2a^3 + a^4b^4 = \boxed{b^2a^2(b - 2a + a^2b^2)}$

7.2.2. Trinomio Cuadrado Perfecto

Puesto que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, podemos usar esta igualdad para factorizar algunos trinomios de segundo grado.
Ejemplo:
$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = \boxed{(x + 5)^2} = (x + 5)(x + 5)$

7.2.3. Cuatrinomio Cubo Perfecto

Puesto que $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, podemos usar esta igualdad para factorizar algunos cuatrinomios de tercer grado:
Ejemplo:
$t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = t^3 + 3 \cdot 2 \cdot t^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot t + 2^3 = \boxed{(t + 2)^3} = (t + 2)(t + 2)(t + 2)$

7.2.4. Diferencia de cuadrados

Puesto que $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$
Ejemplos:
$b^2 - 9 = \boxed{(b + 3) \cdot (b - 3)}$
$x^4 - 16a^4 = (x^2 - 4a^2)(x^2 + 4a^2) = \boxed{(x - 2a)(x + 2a)(x^2 + 4a^2)}$

7.2.5. Factorizar polinomios conociendo una raíz

Como vimos en la sección 6.2.7, si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ y por lo tanto $P(x) = (x-a) \cdot C(x)$, dónde $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ por $(x-a)$.
Ejemplo:
Como -3 es raíz de $x^3 - 8x + 3$ (ya que $(-3)^3 - 8(-3) + 3 = 0$), entonces basta con hallar el cociente de la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & & 3 & 9 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto $x^3 - 8x + 3 = \boxed{(x+3)(x^2 - 3x + 1)}$

Observación: Si conocemos una raíz de un polinomio siempre vamos a poder factorizarlo encontrando el cociente mediante la regla de Ruffini, ya que el divisor siempre será de la forma $x - a$.

7.2.6. Factorizar polinomios con la fórmula de Bhaskara

Si $P(x)$ es un **polinomio de grado 2** y a_1 y a_2 son sus raíces (las cuales se pueden encontrar resolviendo la ecuación de segundo grado $P(x) = 0$ mediante la fórmula de Bhaskara), entonces $P(x) = C_p(x - a_1)(x - a_2)$, donde C_p es el coeficiente principal de $P(x)$.
Ejemplo:
Sea $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$. Buscamos sus raíces resolviendo la ecuación $2x^2 - 2x - 12 = 0$ mediante la fórmula de Bhaskara:

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 10}{4} \Rightarrow a_1 = 3;\ a_2 = -2$$

Por lo tanto $2x^2 - 2x - 12 = \boxed{2(x-3)(x+2)}$

7.3. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Extraer los factores comunes en las siguientes expresiones algebraicas

   a) $2x^2 + 4xy - 6x^3$ b) $6x^2y - 9x^2y^2 + 12xy$

   c) $12u^5a^2 + 18u^2a^3 - 24u^3a^4$ d) $2t^2 + 100t^3$

   e) $x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 - xy^4z^3 + z^4y^3$

2. Considerar distintos grupos dentro de una expresión algebraica dada, extraer los factores comunes en cada uno de ellos. Repetir la extracción de factores comunes, si es posible

a) $x^2+4x+xy+4y$ b) $xy^2-2xy+yz-2z$

c) $x^4-x^3+x^2+x^2y-xy+y$ d) $2xy-yz+2xu-uz$

e) $x^3y-x^2y-y-x^3+x^2+1$

3. Decidir cuales de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, de ser así factorizarlos

   a) $x^2+2xy+y^2$ b) x^2+2x+b^2

   c) $a^2+8a+16$ d) z^2+zy+y

   e) $36+12y+y^2$ f) $x^2-2xy+y^2$

   g) a^2-2b+b^2 h) $d^2-8d+16$

   i) $z^2-2zy+y^2$ j) $36-12t+t^2$

4. Factorizar los siguientes cuatrinomios cubos perfectos

   a) $x^3-6x^2+12x-8$ b) $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$ c) $x^9-3x^6+3x^3-1$

   d) $x^6+\frac{1}{27}+x^4+\frac{1}{3}x^2$

5. Factorizar utilizando diferencia de cuadrados

   a) x^2-100 b) $x^2-\frac{1}{36}$ c) $4x^2-25$ d) t^4-4 e) h^8-64

6. Factorizar teniendo en cuenta que a es raíz de los polinomios

   a) x^3+27 $a=-3$ b) x^5-32 $a=2$ c) z^7+1 $a=-1$

   d)$27x^3-1$ $a=1/3$ e) z^2-25 $a=5$ f) t^2+t-6 $a=-3$

   g) x^3+2x^2-5x-6 $a=-1$

7. Factorizar los siguientes polinomios utilizando la fórmula de Bhaskara

   a) x^2-3x-4 b) $-5x+3-2x^2$ c) $-x^2-4x-4$ d) $-6-3x+3x^2$

8. Factorizar las siguientes expresiones combinando los casos anteriores

   a) $8x^2+16xy+8y^2$ b) $ha^2-2hab+hb^2$

   c) $d^2-8d+16+d-4$ d) $z^3-2z^2y+zy^2$

   e) $36ac^2-12ac^3+ac^4$ f) x^5-x g) $x^5-x^3+x^2-1$

   h) $3x^4-9x^3+9x^2-3x$ i) $x^5+x^3+x^2+1$

   j) $x^4+3x^3+2x^2$ k) x^3+2x^2-x-2 sabiendo que $a=1$ es raíz

   l) x^3-2x^2-5x+6 sabiendo que $a=1$ es raíz

9. Factorizar y simplificar las siguientes expresiones

   a) $\dfrac{24x^2}{12x^3}$ b) $\dfrac{2b}{4b^2+b}$ c) $\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}$ d) $\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2}$

10. Simplificar y resolver

a) $\dfrac{x^2-4x+4}{2x}\cdot\dfrac{6x-12}{x^3-6x^2+12x-8}$ b) $\dfrac{7x}{x^3-x}\cdot\dfrac{x-1}{x+5}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x-6}{x^2-25}\cdot\dfrac{x+5}{x^2-6x}$ d) $\dfrac{y+1}{y^2-2y+1}\cdot\dfrac{y^2-1}{y^2+2y+1}$ e) $\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^2-1}$

f) $\dfrac{y^2-4}{y^2-9}\div\dfrac{y-3}{y+3}$ g) $\dfrac{x+1}{7-x}\div\dfrac{x^2-1}{x^2-49}$ h) $\dfrac{z^2+4z+4}{x}\div\dfrac{z^2-4}{zx-2x}$

11. Resolver

a) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}$ b) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}$

c) $\dfrac{y}{y^2-6y+9}+\dfrac{2}{y^2-9}$ d) $\left(\dfrac{2}{x+1}\div\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^2-1}{x}$

e) $\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z+1}\dfrac{z^2-1}{z}$ f) $\left(\dfrac{1}{y+2}-\dfrac{1}{y-2}\right)\div\dfrac{4}{y^2-4}$

8. Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, así como su aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x, y (las incógnitas aparecen elevadas a la primera potencia) tiene una forma general:

$$\begin{cases} ax + by = & c \\ dx + ey = & f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

8.1. Solución del sistema

El par (x_0, y_0) es solución del sistema: si al reemplazar x por x_0 e y por y_0 ambas ecuaciones se transforman en identidades numéricas.

Un sistema lineal puede tener **solución única**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

8.1.1. Método de sustitución

Despejando de una ecuación una de las incógnitas y reemplazando en la otra ecuación la expresión obtenida.

8.1.2. Método de igualación

Despejando la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualando.

Ejemplos:
1) Sistema con **solución única**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = & 12 \\ 4x - 3y = & 6 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución.
De la primera ecuación: $x = \dfrac{12 - 3y}{2} \quad (*)$
Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene: $4\left(\dfrac{12-3y}{2}\right) - 3y = 6$
Luego $24 - 6y - 3y = 6$ entonces $y = 2$ y con este valor en $(*)$ resulta $x = 3$.

<u>La solución es $(3\,,2)$</u>

2) Sistema con **infinitas soluciones**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = & 12 \\ -4x - 6y = & -24 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución.
De la primera ecuación: $x = \dfrac{12-3y}{2} \quad (*)$
Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene: $-4\left(\dfrac{12-3y}{2}\right) - 6y = -24$
Luego $\;-24-6y+6y=-24\;$ entonces $\;0=0\;$ o mejor dicho cualquier valor de y satisface la ecuación, tomando $y=\alpha$ (donde α es cualquier real) y sustituyendo en $(*)$ resulta $x = \dfrac{12-3\alpha}{2}$.
Las soluciones son $\left(\dfrac{12-3\alpha}{2}, \alpha\right)$ para cualquier número real α.

3) Sistema **sin solución**:

$$\begin{cases} 2x+3y = & 12 \\ 4x+6y = & 6 \end{cases}$$

Intentemos resolver por igualación.
De la primera ecuación: $x = \dfrac{12-3y}{2}$
De la segunda ecuación: $x = \dfrac{6-6y}{4}$
Luego $\quad \dfrac{12-3y}{2} = \dfrac{6-6y}{4}$

Entonces $\;48-12y = 12-12y\;$, lo cual evidentemente es una contradicción y no existe ningún valor de y que satisfaga la igualdad.

Concluimos que no existe ninguna solución para el sistema.

8.2. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario.

1. Resolver los siguientes sistemas y verificar la solución obtenida

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=-3 \\ -3x=1-6y \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+3y=-2 \\ 3x-2=x+6y+2 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes problemas

a) La suma de dos números es 28 y su diferencia 6. Calcular dichos números .

b) Una botella y su corcho cuestan \$45 y la botella cuesta \$39 más que el corcho. ¿Cuánto cuesta la botella y cuánto el corcho?

c)Uno de los ángulos de un triángulo mide 52° y la diferencia de los otros dos es 88°. ¿Cuánto mide cada uno de esos ángulos ? (*Recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°*)

d) Calcular dos números si la mitad del primero, más un tercio del segundo es 17; y un tercio del primero, más un medio del segundo es 18.

e) En un corral hay entre pollos y cabritos 23 animales; si se cuentan 60 patas. ¿Cuántos pollos y cuántos cabritos hay?

f) La diferencia de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es igual a 26°. ¿Cuánto mide cada ángulo ?

g) Por un par de zapatos se paga el triple que por una corbata, gastando en total por los dos artículos $600. Calcular el costo de cada uno.

h) Dividiendo el mayor de dos números naturales por el menor se obtiene el cociente igual 3 y el resto igual a 1; si se divide el mayor por el menor aumentado en uno, el cociente es 2 y el resto 3. Calcular ambos números .

i) Se cambian $1000 en billetes de $10 y $50, recibiendo 24 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase se obtienen?.

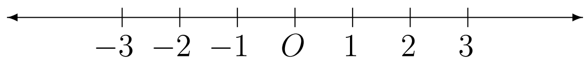
j) Se quiere separar $70\,g$ de oro en dos partes, de tal manera que la mayor tenga $20\,g$ más que la menor. ¿Cuántos gramos debe tener cada parte?

9. Conjuntos en la recta y el plano coordenado

Objetivos: Conocer la ubicación de puntos y conjuntos en la recta y en el plano en particular las rectas y sus ecuaciones.

9.1. Coordenadas rectangulares en la recta

Trazamos una recta horizontal y un punto O, llamado origen. A la derecha del origen se ubican los números positivos y a la izquierda los negativos.



9.2. Coordenadas rectangulares en el plano

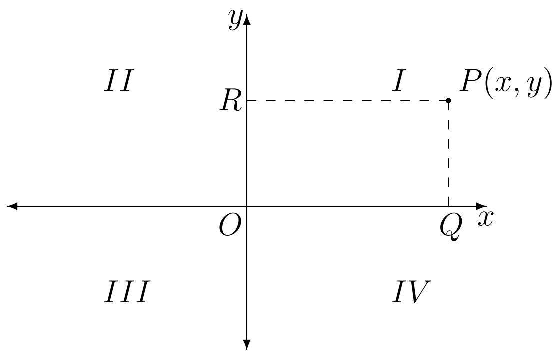
Trazamos dos rectas perpendiculares en el plano que llamaremos eje x y eje y; el punto de intersección O se llama origen de coordenadas. El plano queda así dividido en cuatro regiones que se llaman **cuadrantes** y que se numeran I, II, III, IV.

Representamos los números sobre cada eje tomando una misma unidad sobre cada uno. Por convención, sobre el eje x colocamos los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda; sobre el eje y, colocamos los números positivos arriba del 0 y los negativos debajo del 0.

Coordenadas de un punto: A un punto P del plano le asociamos dos números (ordenadamente) de la siguiente manera:

- Trazamos una perpendicular al eje x; al punto Q le corresponde un número x en el eje x.

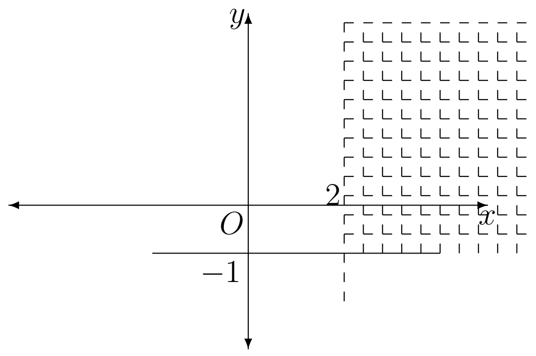
- Trazamos una perpendicular al eje y; al punto R le corresponde un número y en el eje y.



Decimos que P tiene coordenadas (x, y), la primera coordenada x se llama **abscisa** de P y la segunda se llama **ordenada** de P. Recíprocamente, dado un par ordenado de números (x, y) es evidente que hay un punto P del plano del cual son las coordenadas. Usualmente se identifica el punto P con sus coordenadas (x, y) y se escribe $P(x, y)$.

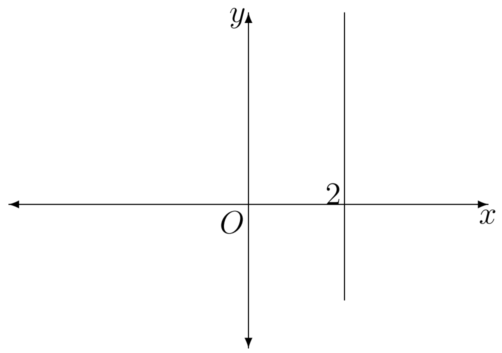
Ejemplo:

El conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas verifican $x > 2$ e $y \geq -1$, que se escribe: $A = \{(x, y) : x > 2 \ ; \ y \geq -1\}$ se representa cuadriculado en el gráfico siguiente.

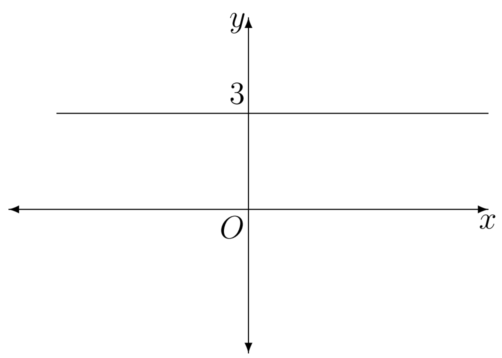


9.3. Rectas en el plano

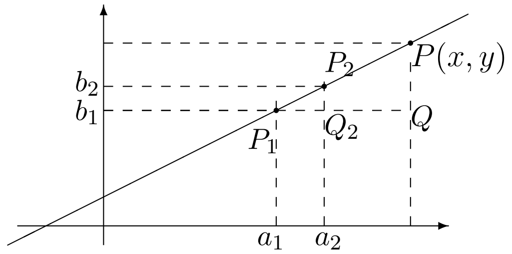
Si consideramos los conjuntos de puntos en el plano:
a) $L_1 = (x, y) : x = 2$ su representación gráfica es una recta vertical



b) $L_2 = (x, y) : y = 3$ se representa con una recta horizontal



c) Si consideramos la recta L que pasa por los puntos $P_1(a_1, b_1)$ y $P_2(a_2, b_2)$.



Los triángulos $P\overset{\triangle}{P_1}Q$ y $P_2\overset{\triangle}{P_1}Q_2$ son semejantes y por lo tanto sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}$$

Operando llegamos a una ecuación lineal de la forma $Ax+By+C=0$ Así, $L=\{(x,y):Ax+By+C=0\}$.

Con estos argumentos hemos mostrado que si L es una recta del plano:

Ecuaciones de rectas en el plano

1. Si L es **vertical**, tiene ecuación $\boxed{\boldsymbol{x=c}}$

   $L=\{(x,y):x=c\}$.

2. Si L es **horizontal**, tiene ecuación $\boxed{\boldsymbol{y=c}}$;

   $L=\{(x,y):y=c\}$

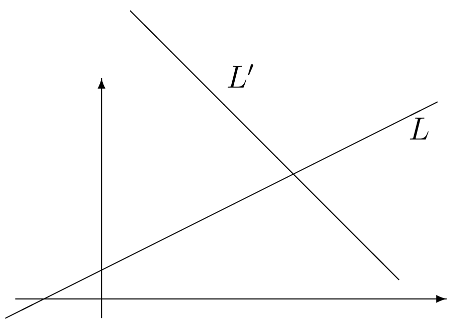
3. Si L no es **ni horizontal ni vertical** y pasa por los puntos $P_1(a_1,b_1)$ y $P_1(a_2,b_2)$, entonces tiene por ecuación:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}}}$$

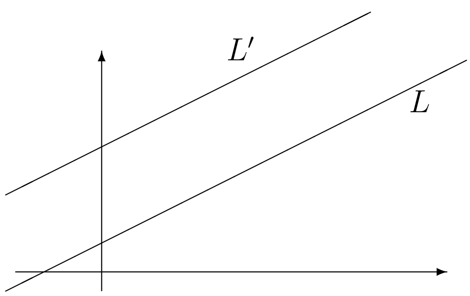
Teorema: El conjunto de puntos que verifica una ecuación lineal: $Ax+By+C=0$ ($A\neq 0$ ó $B\neq 0$) es una recta del plano.

9.3.1. Posición relativa de dos rectas

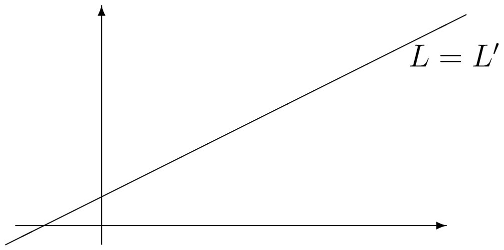
Dos rectas L y L' del plano pueden ser:



Transversales: si se cortan en un punto.



Paralelas: si no se cortan.



Coincidentes: si $L = L'$

Puesto que cada recta tiene una ecuación lineal:
$L : Ax + By = C$
$L' : A'x + B'y = C'$
Los puntos de intersección, si los hubiera, deben verificar ambas ecuaciones, es decir, el sistema lineal

$$\begin{cases} Ax + By = & C \\ A'x + B'y = & C' \end{cases}$$

Decir que las rectas son **transversales** es lo mismo que decir que el sistema admite una **solución única**.

Decir que las rectas son **paralelas** es lo mismo que decir que el sistema no tiene **ninguna solución**.

Decir que las rectas son **coincidentes** es lo mismo que decir que el sistema tiene **infinitas soluciones**.

9.4. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Representar los siguientes conjuntos de la recta

   a) $A = \{x : 2 < x \leq 3,5\}$ b) $B = \{x : 2 \leq x < 6\}$

   c) $C = \{x : -2 \leq x < 4\}$ d) $D = \{x : -1,5 < x < 6\}$

   e) $E = \{x : x = 6\}$ f) $F = \{x : x \neq 0\}$

2. Representar en el plano los siguientes pares ordenados y decir a que cuadrante pertenecen

   $P_1(2\,,-1)$ $P_2(-2\,,1)$ $P_3(5/2\,,3)$ $P_4(1/2\,,-2)$ $P_5(-3\,,-1/2)$

3. Representar los siguientes conjuntos del plano

   a) $A = \{(x,y) : x > -1\}$ b) $B = \{(x,y) : y \leq 4\}$

   c) $C = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 3,5 \wedge y > 0\}$ d) $D = \{(x,y) : x.y < 0\}$

   e) $E = \{(x,y) : x = y\}$ f) $F = \{(x,y) : x = y \wedge x > -1\}$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados

   a) $(2,3)$ $(4,5)$ b) $(1,\frac{1}{3})$ $(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ c) $(5,-1)$ $(-5,-1)$

   d$(-1,5)$ $(-1,\frac{3}{4})$ e) $(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ $(0,0)$ f) $(1,-1)$ $(-1,1)$

5. Sea L la recta que pasa por $P_1(-1,0)$ y $P_2(5,1)$

   a) Hallar la ecuación de L y comprobarla.
   b) Mostrar otros dos puntos de L.
   c) ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a L:
   $Q_1(3,\frac{6}{7})$ $Q_2(10,2)$ $Q_3(-7,-1)$?

6. Representar gráficamente los conjuntos de puntos que verifican la ecuación dada

   a) $5x+y=3$ b) $3x-6=0$ c) $x-2=0$

   d) $y-2=0$ e) $4x-3y=6$ f) $y=0$

7. Determinar el valor de k para que el punto dado satisfaga la ecuación lineal

   a) $2x+ky=0$ $(-1,3)$

   b) $(k-1)x+3ky=2(k+1)$ $(2,-2)$

8. Representar gráficamente los conjuntos

   a) $A=\{(x,y): 2x-y=1 \;\; x>0\}$

   b) $B=\{(x,y): -x+y=2 \;\; y<0\}$

9. Encontrar los puntos de intersección con los ejes coordenados de las siguientes rectas

   a) $4x-y=10$ b) $3x=-y-8$ c) $x=2$
   d) $x+y-3=0$ e) $y-1=-2$ f) $y=-2x+5$

10. Representar gráficamente los siguientes pares de rectas indicando si son transversales, paralelas o coincidentes. En el caso de ser transversales indicar el punto de intersección

    a) L: $4x+3y=11$ L': $3x-y=18$
    b) L: $x+y-3=0$ L': $2x+2y=5$
    c) L: $x-3=y+1$ L': $x+1=8(y-2)$
    d) L: $x-y=1$ L': $4x-2y=4$

11. Hallar los vértices del triángulo determinado por las rectas L_1: $3x-2y=-6$
    L_2: $2y+x=6$ L_3: $6y-x=2$ y representarlo gráficamente

10. Logaritmos

Objetivos: Conocer la definición y propiedades de los logaritmos y su aplicación a la resolución de ecuaciones. Aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

10.1. Definición

Definición de logaritmo

Sea $N > 0$ y b un número real positivo y distinto de 1, el logaritmo de N en base b es un número c, tal que b elevado a la c es igual a N.

$$\boxed{\log_b N = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = N}$$

Ejemplo:
$\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
$\log_2 64 = 6$ porque $2^6 = 64$

10.1.1. Propiedades

Logaritmo de un producto

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\boxed{\log_b(n.m) = \log_b n + \log_b m}$$

Ejemplo:
$\log_2(64 \cdot 16) = \log_2 64 + \log_2 16 = 6 + 4 = 10$

Logaritmo de un cociente

2. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

$$\boxed{\log_b(n/m) = \log_b n - \log_b m}$$

Ejemplo:
$\log_3 \dfrac{27}{81} = \log_3 27 - \log_3 81 = 3 - 4 = -1$

Logaritmo de una potencia

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\boxed{\log_b a^n = n \log_b a}$$

Ejemplo:
$\log_4 16^7 = 7 \log_4 16 = 7 \cdot 2 = 14$

Fórmula del cambio de base

4. Fórmula del cambio de base: Permite calcular cualquier logaritmo en base b mediante otros de cualquier otra base:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Ejemplo:
$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

10.2. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Calcular utilizando la definición

   a) $\log_2 256$ b) $\log_3 81$ c) $\log_5 1/5$ d) $\log_2 1/8$

   e) $\log_4 1/4$ f) $\log_9 3$ g) $\log_{1/3} 27$ h) $\log_{10} 0,1$

   i) $\log_{10} 1$ j) $\log_{10} 0,01$ k) $\log_2 0,25$ l) $\log_5 0,2$

2. Calcular utilizando las propiedades

   a) $\log_2 \dfrac{1}{8}$ b) $\log_4 \dfrac{1}{4}$ c) $\log_4 \dfrac{16 \cdot 256}{64}$

   d) $\log_3(27^7 \cdot 9^{12})$ e) $\log_2 \dfrac{\sqrt{8}}{256}$ f) $\log_{10} \dfrac{\sqrt{1000}}{100}$

   g) $\log_5 \sqrt[5]{125}\sqrt[8]{25}$ h) $\log_3 \dfrac{\sqrt{27}}{9 \cdot 81}$

3. Calcular, usando cambio de base

   a) $\log_8 4$ b) $\log_9 \frac{1}{3}$ c) $\log_{125} \frac{1}{25}$

4. Calcular los siguientes logaritmos utilizando la calculadora. Comparar los resultados con el orden de magnitud de los argumentos (ver sección 2 ej. 8)

   a) $\log_{10} 2000$ b) $\log_{10} 50000$ c) $\log_{10} 30000000$

   d) $\log_{10} 0,12$ e) $\log_{10} 0,00015$

5. Calcular los logaritmos del ejercicio 1) utilizando un cambio a la base 10 (los valores en la base 10 obténgalos de la calculadora).

6. Calcular los logaritmos del ejercicio 1) utilizando un cambio a la base e (los valores en la base e obténgalos de la calculadora).

7. Resolver las siguientes ecuaciones

   a) $\log_{10} 2x = 3$ b) $\log_5 4x = 2$ c) $\log_2(x+1) = 4$

   d) $\log_{15}(x^2 + 3x + 5) = 1$ e) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

   f) $\log_{10} 2x - \log_{10}(x-5) = \log_{10} 3$ g) $\log_{10}(\log_{10} x) = 3$

   h) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 4$

8. Resolver las siguientes ecuaciones (usar la base más adecuada):

   a) $2^{x+1} = 128$ b) $27^{3x-2} = 9$ c) $25^{x-3} = 25^{2x+3}$ d) $4^{x^2} = 16^{2x-2}$

   e) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$ f) $3^{3x} = (\frac{1}{3})^{3x+2}$

11. Trigonometría

Objetivos: Resolver problemas geométricos a través de la resolución de triángulos.

11.1. Ángulos

11.1.1. Definición

Un ángulo es una región del plano limitada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial. A las dos rectas se les denomina lados del ángulo y al punto inicial se le llama vértice del ángulo.

11.1.2. Sistema sexagesimal de medición de ángulos

Se divide una circunferencia en 360 arcos iguales, las semirrectas que pasan por los extremos del arco y parten del centro determinan un ángulo de un grado sexagesimal ($1°$). Del mismo modo, cada ángulo de un grado se divide en 60 y entonces cada uno de estos ángulos mide un minuto ($1'$). Cada ángulo de un minuto se divide en 60, luego, cada uno de esos ángulos mide un segundo ($1''$)

11.1.3. Sistema circular de medición de ángulos

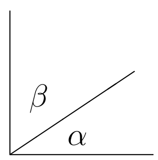
La medida de un ángulo en radianes queda definida como el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio en cualquier circunferencia que tenga como centro el vértice del ángulo.

Equivalencia Es fácil ver que si un ángulo mide $360°$ en el sistema sexagesimal entonces mide 2π radianes en el sistema circular. Esta relación permite pasar de un sistema de medición angular a otro.

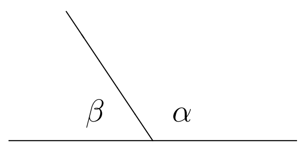
11.1.4. Ángulos complementarios y suplementarios

Ángulos complementarios Dos ángulos agudos α y β se dicen complementarios si se cumple que $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$.

Ángulos suplementarios Dos ángulos α y β (positivos) se dicen suplementarios si se cumple que $\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$.

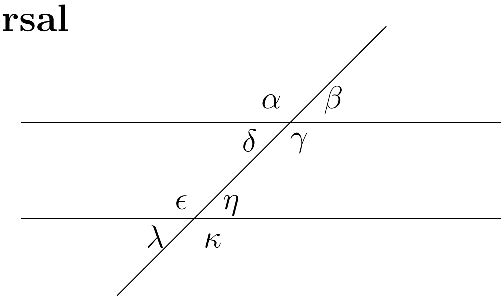


Complementarios



Suplementarios

11.2. Ángulos determinados entre dos rectas paralelas y una transversal



Son iguales las medidas de las siguientes parejas de ángulos:

Opuestos por el vértice: Son los ángulos α y γ; β y δ; ϵ y κ; η y λ.

Correspondientes: Son los ángulos α y ϵ; β y η; δ y λ; γ y κ.

Alternos Internos: Son los ángulos δ y η; γ y ϵ.

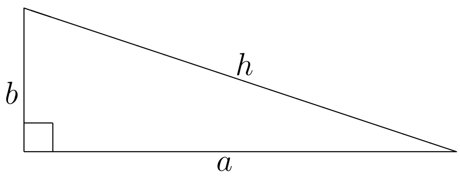
Alternos Externos: Son los ángulos α y κ; β y λ.

11.3. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo (con un ángulo recto, es decir, de 90°) se llama hipotenusa al lado opuesto al ángulo recto y catetos a los lados adyacentes al ángulo recto.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Teorema de Pitágoras



$$\boxed{\boldsymbol{a^2 + b^2 = h^2}}$$

11.4. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas son relaciones entre los lados del triángulo y sólo dependen de los ángulos de éste.

Razones trigonométricas

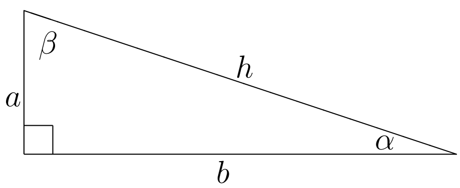


figura 1

$$\boxed{\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{a}{h}}$$

$$\boxed{\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{b}{h}}$$

$$\boxed{\textbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}}$$

Notar que: Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo con la misma medida α son semejantes. Por lo tanto **las razones trigonométricas dependen del ángulo no de las longitudes de los lados del triángulo** .

Notar que: Debido a la definición de $\operatorname{tg}\alpha$ se puede deducir que $\boxed{\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}}$

Propiedad:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{h}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{h^2}$

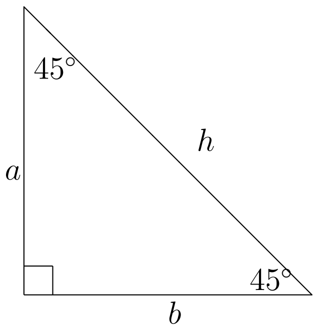
como $a^2 + b^2 = h^2$ por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\boldsymbol{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}$$

11.4.1. Angulos especiales

Calcular los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de a) 45° b) 30° c) 60°

a) Si $\alpha = 45°$, $\beta = 90° - \alpha = 45°$



$\operatorname{sen}45° = \cos 45°$

Luego $a = b$

Por Pitágoras $a^2 + a^2 = h^2$

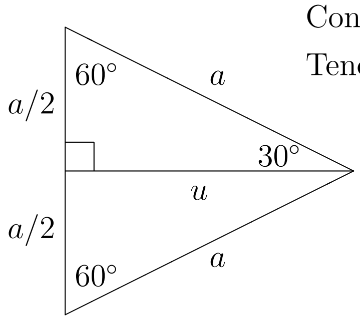
$2a^2 = h^2 \qquad a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}45° = \dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{h\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname{sen}45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg}45° = 1$$

b) y c) Consideremos un triángulo equilátero.



Considerando una altura, divide uno de los ángulos por la mitad.

Tenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa a y cateto $a/2$

Por Pitágoras $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + u^2$

Despejando: $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ Luego $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ =sen 60°

$\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2} = \cos 60°$

$$\operatorname{sen}30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \operatorname{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad\qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

En resúmen

Ángulos especiales

ángulo	seno	coseno	tangente
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Ejemplo:
Resolver un triángulo donde el cateto $a = 2\ cm$ y su ángulo opuesto $\beta = 60^\circ$

Como $\alpha + \beta = 90^\circ \quad \alpha = 30^\circ$

Como $\cos\beta = \dfrac{a}{h} \qquad \cos 60^\circ = \dfrac{2\ cm}{h}$

Luego $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2\ cm}{h} \qquad h = 4\ cm$

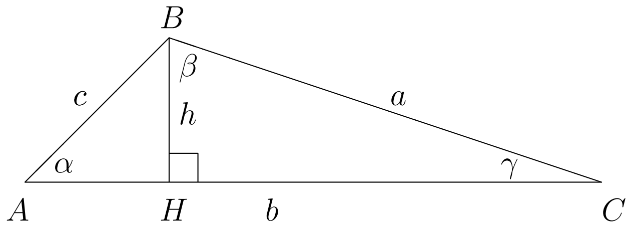
Como $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{b}{2}$

Luego $\sqrt{3} = \dfrac{b}{2} \qquad b = 2\sqrt{3}\text{cm}$

11.5. Teorema del seno. Teorema del coseno

Teorema del seno El teorema del seno establece la relación que existe entre los lados y ángulos en cualquier triángulo.

Si se traza una altura en el triángulo (en la figura la altura que corresponde al lado b) quedan determinados dos triángulos rectángulos : $A\overset{\Delta}{B}H$ y $H\overset{\Delta}{B}C$



en el triángulo $A\overset{\Delta}{B}H$: $\quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$

en el triángulo $H\overset{\Delta}{B}C$: $\quad \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a}$

de donde se deduce que: $h = c \operatorname{sen} \alpha \qquad h = a \operatorname{sen} \gamma \quad \text{y} \quad c \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \gamma$
Luego:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Si se repite el mismo proceso trazando una altura correspondiente a otro lado del triángulo (por ejemplo la del lado c)

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Luego:

Teorema del seno

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}}}$$

Teorema del coseno Observando la figura del triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras a cada triángulo rectángulo tenemos:

$$c^2 = h^2 + (b - \overline{CH})^2 = h^2 + b^2 - 2b\overline{CH} + \overline{CH}^2$$

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2$$

pero $\overline{CH} = a \cos \gamma$ entonces:

$$c^2 = a^2 - \overline{CH}^2 + b^2 - 2b\overline{CH} + \overline{CH}^2$$

Teorema del coseno

$$\boxed{\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma}}$$

De la misma forma, utilizando las otras alturas del triángulo (las correspondientes a los otros lados), se podrían obtener otras dos versiones del teorema del coseno:

$$\boxed{\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha}}$$

Aclaración: Tanto en el teorema del seno como en el teorema del coseno puede ser necesario tener que calcular el valor del seno o del coseno de ángulos mayores a 90°. Para esos casos será necesario utilizar las siguientes expresiones:

<u>Si $90° < \alpha < 180°$</u> :

Seno y coseno de ángulos entre 90° y 180°

$$\boxed{\boldsymbol{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)}} \qquad \boxed{\boldsymbol{\cos \alpha = -\cos(180° - \alpha)}}$$

11.6. Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

En cada uno de los siguientes ejercicios realice un dibujo utilizando una escala adecuada.

1. Resolver los siguientes problemas

   a) Calcular cuanto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos miden $3\,cm$ y $4\,cm$.

   b) Calcular cuanto miden los catetos de un triángulo rectángulo si la hipotenusa es de $15\,cm$ y se sabe que un cateto mide el doble que el otro.

   c) Si el cateto mayor de un triángulo mide $\sqrt{12}$, ¿cuánto mide el cateto menor, si su hipotenusa mide el doble que éste?

   d) Calcular el área de un triángulo equilátero de $10\,cm$ de lado.

2. Resolver utilizando la calculadora

   a) Calcular cuanto mide un cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide $12\,m$ y el otro cateto mide $4\,m$.

   b) Calcular cuanto mide la diagonal de un cuadrado de lado $9\,m$.

   c) Calcular cuanto mide el lado de un cuadrado cuya diagonal es de $1,5\,km$.

   d) Si camina por diagonal 79 desde 1 y 60 hasta 6 y 54, ¿qué distancia camina? (Medir las distancias en cuadras).

3. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos especiales (ver sección 11.4.1)

   a) ¿Cuánto vale la hipotenusa de un triángulo si uno de sus catetos vale $5\sqrt{3}$ y el ángulo comprendido entre ellos vale 30°?

   b) ¿Cuánto vale el cateto opuesto a un ángulo de 45° si la hipotenusa del triángulo vale 8.

   c) En un triángulo cuya hipotenusa vale 7, ¿cuánto vale el coseno del ángulo cuyo cateto adyacente vale 4?

   d) Si en un triángulo la hipotenusa vale 10 y uno de sus catetos vale 8, ¿cuánto vale el coseno del ángulo opuesto a dicho cateto?

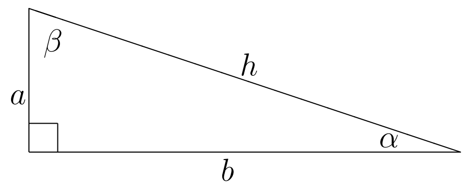
   e) En un triángulo cuya hipotenusa vale 6, ¿cuánto vale el ángulo cuyo cateto opuesto vale 3?

f) ¿Cuánto vale la tangente de un ángulo si su seno vale $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y su coseno vale $\frac{3}{4}$?

g) Cuando el ángulo de elevación del sol sobre la horizontal es de $30°$ una torre proyecta una sombra de $75\,m$. Calcular su altura.

4. Resolver utilizando la calculadora

a) Con referencia un triángulo como el de la figura:



I) Dados $\alpha = 32°$ y $a = 12$. Calcular: b, h y β.

II) Dados $\alpha = 42°$ y $h = 28$. Calcular: b, a y β.

III) Dados $a = 14$ y $b = 35$. Calcular: h, α y β.

IV) Dados $h = 145$ y $a = 92$. Calcular: b, α y β.

b) Se piensa construir una pista de aviación, al final de la misma quedará una arboleda de $25\,m$ de altura. ¿A que distancia mínima de la arboleda debe terminar la pista si el ángulo de despegue de los aviones es de $16°$?

c) Un automóvil asciende una cuesta que tiene una inclinación de $2°$ con la horizontal. Si viaja a una velocidad de $60\,km/h$, ¿cuántos metros varía su altura sobre el nivel del mar en 15 minutos?

d) Un ingeniero forestal se encuentra parado a $30\,m$ de un árbol. Mediante la utilización de un clinómetro mide un ángulo de $15°$ entre la horizontal y la parte más alta del árbol. Si el ingeniero mide $1,70\,m$ y el terreno no tiene pendiente, ¿cuánto mide el árbol?

5. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos especiales (ver sección 11.4.1)

a) ¿Cuánto mide el lado opuesto a un ángulo de $45°$ de un triángulo, si otro de sus ángulos mide $60°$ y su lado opuesto mide $2\sqrt{3}$?

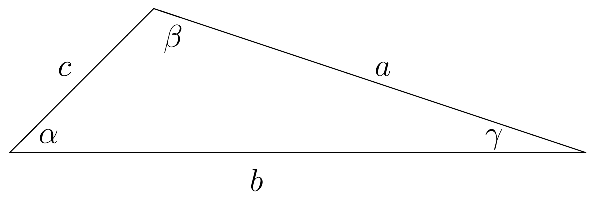
b) Si en un triángulo dos de sus lados miden 3 y 5; y el ángulo comprendido entre ellos mide $60°$, ¿cuánto mide el otro lado?

c) En un triángulo un lado mide $3\sqrt{3}$ y los otros dos miden 3. ¿Cuánto miden sus ángulos?

d) En un triángulo, uno de sus lados mide $\sqrt{8}$ y el ángulo opuesto a éste mide $30°$. Si otro de sus lados mide 4, ¿cuánto vale el ángulo opuesto a éste?

6. Resolver utilizando la calculadora

a) Resolver los siguientes triángulos , con referencia a un triángulo como el de la figura:



I) $a = 34 \quad b = 29 \quad c = 40$
II) $a = 15 \quad \beta = 82° \quad \gamma = 29°$
III) $a = 7 \quad b = 9 \quad \gamma = 60°$

b) Calcular el área del triángulo cuyos lados miden: 4, 8 y 11 cm.

c) En el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, el lado AB mide 10 cm y el lado BC mide el doble que el lado AC. Hallar las longitudes de los lados sabiendo que el ángulo A mide 60°.

d) Si un triángulo tiene un lado que mide 20 y su ángulo opuesto mide 100°, ¿cuánto mide otro de sus lados, si el ángulo opuesto a éste mide 53°?

e) Un triángulo tiene un lado de 3 y otro de 5. Si el ángulo opuesto al lado de 5 mide 70°, ¿cuánto mide el ángulo opuesto al lado de 3?

Resultados

2. Operaciones elementales

1. a) -1 b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{11}{24}$ d) $\frac{11}{3}$ e) $\frac{76}{315}$ f) $\frac{93}{40}$ g) $-\frac{8}{3}$

2. a) 1 b) 1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{120}$

3. a) $3,\widehat{6}$ b) $2,\widehat{3}$ c) 0,25 d) 3,4 e) 144 f) -8

4. a) 6^7 b) 8 c) $\frac{1}{b^5}$ d) $15x^2$ e) $4x$ f) $\frac{1}{49}$ g) 4^{11} h) a^9

   i) $-3h^{12}$ j) $-\frac{7}{4}k^{20}\,z$ k) $\frac{4\,v^8}{25\,a^3}$

5. a) $-\frac{7}{6}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $6|b|$ d) -2 e) c f) 3 g) -3 h) -3

   i) $\frac{3\,y\sqrt[3]{y^2}}{7\,x}$ j) $\frac{|y|}{2|a|}$ k) $\frac{2|z|^7}{3|w|}$ l) $\frac{1}{3}\,a\sqrt[3]{u^2}$ m) $2^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$

   n) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

6. a) $\frac{1}{10}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 1

7. a) $\approx 31,62$ b) 130 c) $\approx 1,55$ d) $\approx 0,69$ e) $\approx 4,77$

8. a) $2\ 10^3$ b) $5\ 10^4$ c) $3\ 10^7$ d) $1,2\ 10^{-1}$ e) $1,5\ 10^{-4}$

   f) $2,324\ 10^3$ g) $2,4\ 10^5$ h) $4\ 10^{-3}$ i) $2,34\ 10^2$ j) $4,44\ 10^{-3}$

   k) $1,222\ 10^1$ l) $1,2\ 10^1$ m) $3\ 10^{-4}$ n) $-2,3\ 10^1$ ñ) $-4,5\ 10^{-6}$

   o) $1,0005\ 10^0$ p) $2,896\ 10^2$ q) $2\ 10^{-1}$ r) $-5,1\ 10^{-1}$ s) $3,004\ 10^{-2}$

9. a) 10^4 b) $3\ 10^2$ c) $2\ 10^6$ d) $1,1\ 10^4$ e) 10^8 f) $1,01\ 10^6$ g) 10^{10}

   h) $4\ 10^2$ i) $6,8\ 10^2$ j) $-5,34\ 10^{14}$ k) $1,25\ 10^{-1}$ l) $4,2\ 10$

10. Idem anterior

11. a) $0,023\,m = 2,3\ 10^{-2}\,m$ b) $25\ 10^{-3}\,m = 2,5\ 10^{-2}\,m$

    c) $325\ 10^{-1}\,dm = 3,25\ 10\,dm$ d) $20\,km = 2\ 10\,km$

    e) $16\ 10^{-6}\,m = 1,6\ 10^{-5}\,m$ f) $250\ 10^3\,m = 2,5\ 10^5\,m$

    g) $455\ 10\,hg = 4,55\ 10^3\,hg$ h) $14\ 10^3\,\mu g = 1,4\ 10^4\,\mu g$ i) $8\ 10^{-3}\,\mu g$

    j) $3,5\ 10^{12}\,\mu g$ k) $789\ 10^5\,cg = 7,89\ 10^7\,cg$ l) $5,5\ 10^{-3}\,hg$

    m) $7,9\ 10^4\,ms$ n) $0,14\ 10^5\,cs$ ñ) $48\ 10^-18\,Ts = 4,8\ 10^-17\,Ts$

12. a) $28\ 10^{-4}\,m^2 = 2,8\ 10^{-3}\,m^2$ b) $5\ 10^4\,cm^2$ c) $625\ 10^{-2}\,dm^2 = 6,25\,dm^2$

    d) $12\ 10^{-2}\,km^2 = 1,2\ 10^{-1}\,km^2$ e) $81\ 10^{-12}\,m^2 = 8,1\ 10^{-11}\,m^2$

    f) $50\ 10^6\,m^2 = 5\ 10^7\,m^2$ g) $5\ 10^6\,cm^3$ h) $1000\ 10^3\,mm^3 = 10^6\,mm^3$

    i) $18\ 10^{-27}\,m^3 = 1,8\ 10^{-26}\,m^3$ j) $8,5\ 10^{15}\,cm^3$ k) $7\ 10^3\,cm^3$

    l) $4200\,l = 4,2\,10^3\,l$ m) $2,9\,10^{-4}\,l$ n) $0,3\,m^3$ ñ) $400\,10^{-6}\,m^3 = 4\,10^{-4}\,m^3$

    o) $2,4\,\frac{g}{cm^3}$ p) $20\,\frac{m}{s}$ q) $270\,\frac{km}{h}$

3. Perímetros, áreas y volúmenes

1. a) $3\,m^2$ b) $2,5\,cm$ c) $12\,m$ d) $2400\,cm^3$ e) $10\,cm$ f) $50000\,m^3$

   g) $20\,m^2$ h) $30000\,l$

2. a) $\approx 6,283\ 10^{-1}\,m$ b) $\approx 3,14\ 10^{-2}\,m^2$ c) $\approx 392,7\,l$ d) $3\,cm$

   e) $5,4\ 10^{-3}\,m^2$ f) $\approx 1,39\,m$ g) $\approx 2,15\ 10^{-3}\,m^3$ h) $\approx 169,65\,cm^3$

4. Ecuaciones lineales

1. a) $x = \frac{11}{3}$ b) $x = \frac{2}{11}$ c) $x = \frac{2}{5}$ d) No tiene solución e) $x = -1$

   f) Infinitas soluciones g) $x = \frac{23}{3}$

2. $a = -\frac{1}{3}$

3. El número es 75.

4. El número es $-\frac{15}{4}$.

5. Deberán transcurrir 2 años.

6. El salario antes del aumento era de \$ 12000.

7. El precio original de las zapatillas era de \$ 700.

5. Ecuaciones de segundo grado

1. a) $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ $x_2 = -2 - \sqrt{2}$ b) $x_1 = 13$ $x_2 = 3$

   c) $x_1 = 5 + 2\sqrt{10}$ $x_2 = 5 - 2\sqrt{10}$

2. a) $x_1 = 10$ $x_2 = -7$ b) $x_1 = -1 + \sqrt{13}$ $x_2 = -1 - \sqrt{13}$

   c) No tiene solución en $\mathbb{R}$ d) $x_1 = -1$ $x_2 = 3$ e) $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{9}{4}$

   f) $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ g) $x = 3$

3. Los números son 0 y -1.

4. El número es 5.

5. Los números son 0 y 24.

6. Los lados del rectángulo miden 9 *cm* y 12 *cm*.

7. La altura del triángulo es de 12 *cm*.

8. Los números son 5 y -6.

9. Los números son 4, 5 y 6.

6. Polinomios

1. a) $-2x^2+2x+2$ b) $x^5+3x^4-5x^3-7$ c) $x^5-3x^4-9x^3+10x-5$

   d) x^3+5x^2-2 e) x^2+x-12 f) $x^5+4x^4+4x^3$ g) $x^7+2x^4-4x^3-8$

   h) $3x^6+8x^5+4x^4-5x^3-11x^2-2x$

2. a) $C(x)=3x-4$ $R(x)=8x^2-5x-1$

   b) $C(x)=x^4-4x^3+9x^2-36x+149$ $R(x)=-602$

   c) $C(x)=3$ $R(x)=2x^3-5x+11$

   d) $C(x)=x^2-2x+4$ $R(x)=-8x-4$

   e) $C(x)=x^4+3x^3+2x^2+6x+23$ $R(x)=63$

   f) $C(x)=x^2-7$ $R(x)=-2x^2+5x+8$

   g) $C(x)=x^3+3x^2+9x+27$ $R(x)=77$

   h) $C(x)=-3x+12$ $R(x)=-46$

3. a) 3 b) -10 c) 0 d) 5 e) 77

4. Se pueden calcular los restos de los incisos b), e), g) y h). Ver respuestas del inciso 2.

5. a) $a=8$ b) $a=-15$ c) $a_1=1$ $a_2=-\dfrac{1}{2}$

   d) $a_1=2$ $a_2=-2$ e) No tiene raíces reales f) $a=-2$

7. Factorización de expresiones algebraicas

1. a) $2x(x+2y-3x^2)$ b) $3xy(2x-3xy+4)$ c) $6u^2a^2(2u^3+3a-4ua^2)$

   d) $2t^2(1+50t)$ e) $z^2y^2(x^3-x^2y-xy^2z+z^2y)$

2. a) $(x+4)(x+y)$ b) $(y-2)(xy+z)$ c) $(x^2-x+1)(x^2+y)$

   d) $(2x-z)(y+u)$ e) $(x^3-x^2-1)(y-1)$

3. a) $(x+y)^2$ b) No es Trinomio Cuadrado Perfecto c) $(a+4)^2$

   d) No es TCP e) $(6+y)^2$ f) $(x-y)^2$ g) No es TCP

   h) $(d-4)^2$ i) $(z-y)^2$ j) $(6-t)^2$

4. a) $(x-2)^3$ b) $(x+\frac{1}{2})^3$ c) $(x^3-1)^3$ d) $(x^2+\frac{1}{3})^3$

5. a) $(x-10)(x+10)$ b) $(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{6})$ c) $(2x-5)(2x+5)$

   d) $(t^2-2)(t^2+2)$ e) $(h^4-8)(h^4+8)$

6. a) $(x+3)(x^2-3x+9)$ b) $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$

   c) $(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)$ d) $(x-\frac{1}{3})(27x^2+9x+3)$

   e) $(z-5)(z+5)$ f) $(t+3)(t-2)$ g) $(x+1)(x^2+x-6)$

7. a) $(x+1)(x-4)$ b) $-2(x+3)(x-\frac{1}{2})$ c) $-(x+2)^2$ d) $3(x-2)(x+1)$

8. a) $8(x+y)^2$ b) $h(a-b)^2$ c) $(d-4)(d-3)$ d) $z(z-y)^2$

   e) $ac^2(6-c)^2$ f) $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ g) $(x-1)(x+1)(x^3+1)$

   h) $3x(x-1)^3$ i) $(x^2+1)(x^3+1)$ j) $x^2(x+1)(x+2)$

   k) $(x-1)(x+1)(x+2)$ l) $(x-3)(x+2)(x-1)$

9. a) $\dfrac{2}{x}$ b) $\dfrac{2}{4b+1}$ c) $\dfrac{y}{x+y}$ d) $\dfrac{3+x}{3-x}$

10. a) $\dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{7}{(x-1)(x+5)}$ c) $\dfrac{1}{x(x-5)}$ d) $\dfrac{1}{y-1}$ e) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$

    f) $\dfrac{(y-2)(y+2)}{(y-3)^2}$ g) $-\dfrac{x+7}{x-1}$ h) $z+2$

11. a) $\dfrac{-4}{(x+2)(x-2)}$ b) $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$ c) $\dfrac{(y-1)(y+6)}{(y-3)^2(y+3)}$

    d) $2(x-1)$ e) $\dfrac{2z-1}{z}$ f) -1

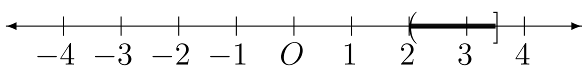
8. Sistemas de ecuaciones lineales

1. a) $(1\,,2)$ b) $(\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{2})$ c) El sistema no tiene solución

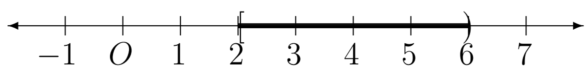
   d) $(3\alpha+2\,,\alpha)$ para cualquier α real ó $\left(\alpha\,,\dfrac{\alpha-2}{3}\right)$ para cualquier α real

2. a) Los números son 17 y 11.
   b) La botella cuesta \$42 y el corcho \$3.
   c) Los ángulos miden 108° y 20°.
   d) Los números son 18 y 24.
   e) En el corral hay 16 pollos y 7 cabritos.
   f) Los ángulos miden 58° y 32°.
   g) Los zapatos cuestan \$450 y la corbata \$150.
   h) Los números son 13 y 4.
   i) Se obtienen 5 billetes de \$10 y 19 de \$50.
   j) Se separan en una parte de $45\,g$ y otra de $25\,g$.

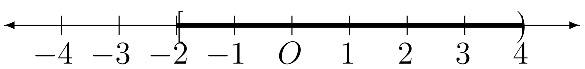
9. Conjuntos en la recta y el plano coordenado

1. a) 

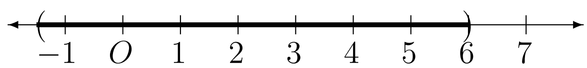
(2 , 3,5]

   b) 

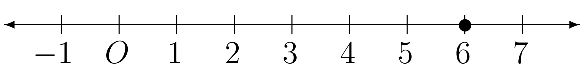
[2 , 6)

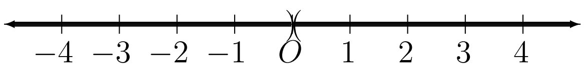
   c) 

[-2 , 4)

   d) 

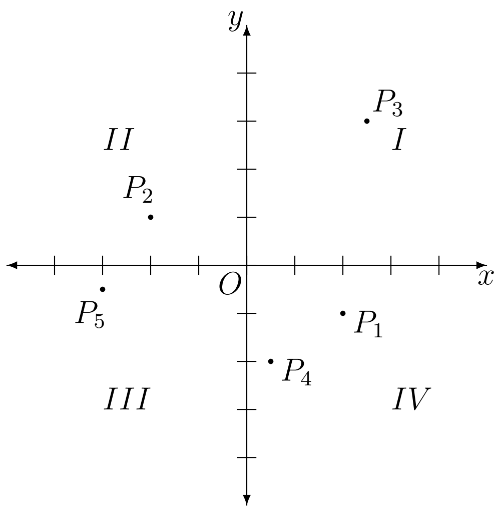
(-1,5 , 6)

   e) 

   f) 

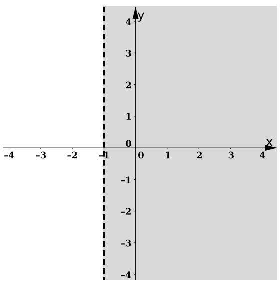
$(\ -\infty\ ,\ 0\ )\cup(\ 0\ ,\ \infty\ )$

2. .

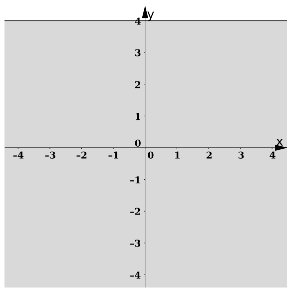


3. .

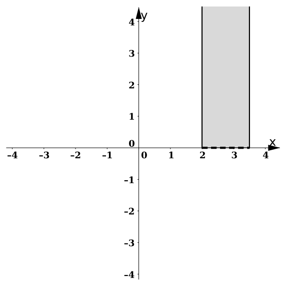
a)



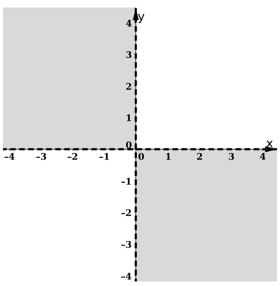
b)



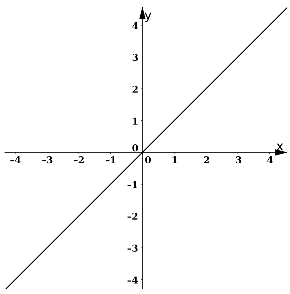
c)



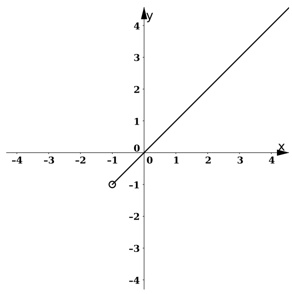
d)



e)



f)



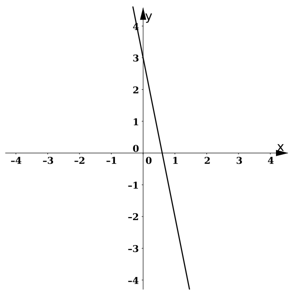
4. a) $y = x + 1$ b) $y = \dfrac{4}{3}x - 1$ c) $y = -1$ d) $x = -1$

   e) $y = \dfrac{1}{2}x$ f) $y = -x$

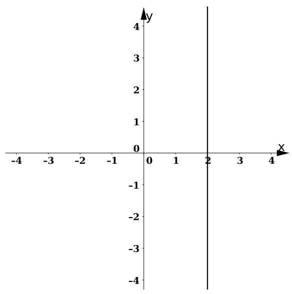
5. a) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{6}$ c) Q_3

6. .

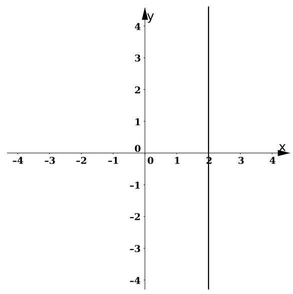
a)



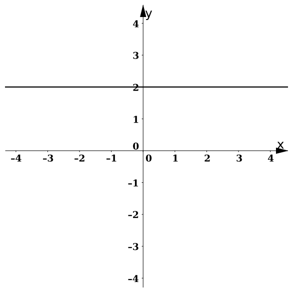
b)



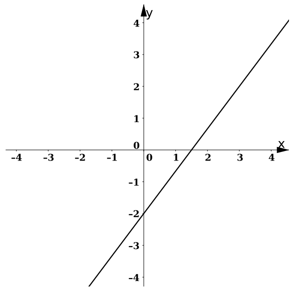
c)



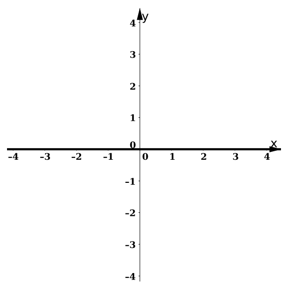
d)



e)



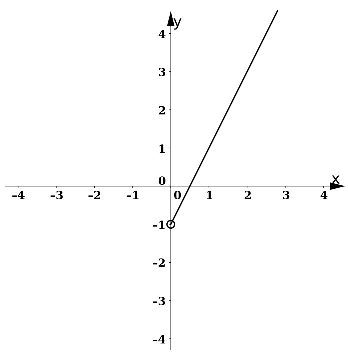
f)



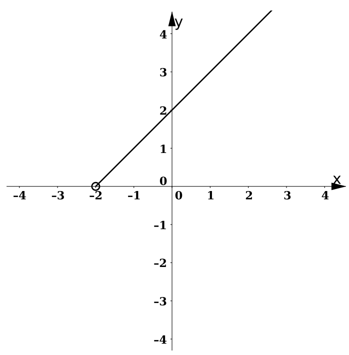
7. a) $k = \dfrac{2}{3}$ b) $k = -\dfrac{2}{3}$

8. .

a)



b)



9. a) Int. eje x: $\left(\dfrac{5}{2}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,-10\,)$

b) Int. eje x: $\left(-\dfrac{8}{3}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,-8\,)$

c) Int. eje x: $(\,2\,,\,0\,)$ Int. eje y: No tiene

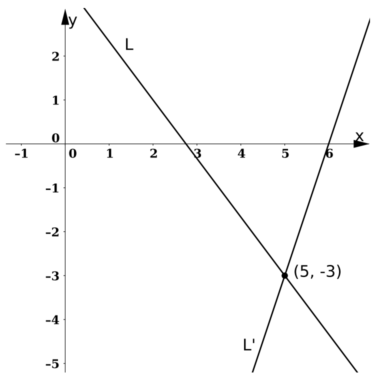
d) Int. eje x: $(\,3\,,\,0\,)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,3\,)$

e) Int. eje x: No tiene Int. eje y: $(0\,,\,-1)$

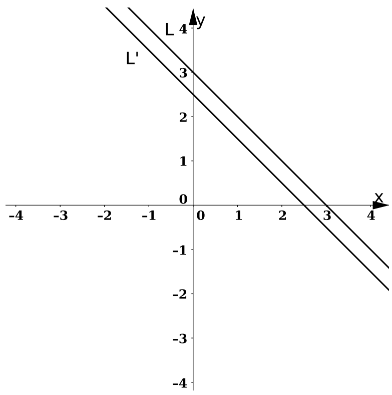
f) Int. eje x: $\left(\dfrac{5}{2}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(0\,,\,5)$

10. .

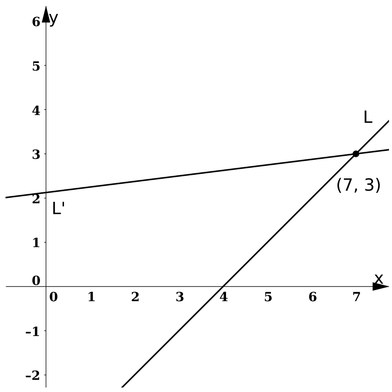
a) Transversales



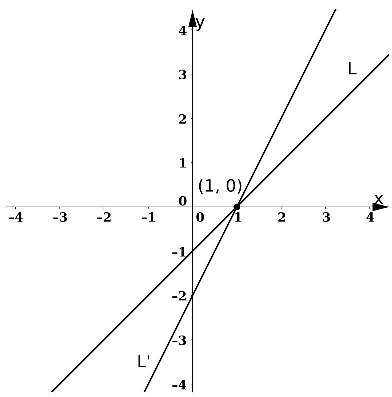
b) Paralelas



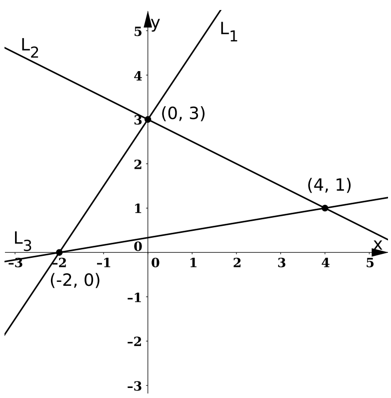
c) Transversales



d) Transversales



11. .



10. Logaritmos

1. a) 8 b) 4 c) -1 d) -3 e) -1 f) $\frac{1}{2}$ g) -3 h) -1

   i) 0 j) -2 k) -2 l) -1

2. a) -3 b) -1 c) 3 d) 45 e) $-\frac{13}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) $\frac{17}{20}$ h) $-\frac{9}{2}$

3. a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$

4. a) $\approx 3,3$ b) $\approx 4,7$ c) $\approx 7,5$ d) $\approx -0,9$ e) $\approx -3,8$

5. Ver 1.

6. Ver 1.

7. a) $x = 500$ b) $x = \frac{25}{4}$ c) $x = 15$ d)$x_1 = 2 \quad x_2 = -5$

   e) $x = 4$ f) $x = 15$ g) $x = 10^{1000}$ h) $x = 4$

8. a) $x = 6$ b) $x = \frac{8}{9}$ c) $x = -6$ d) $x = 2$ e) $x = 7$ f) $x = \frac{1}{3}$

11. Trigonometría

1. a) $5\,cm$ b) $3\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$ c) 2 d) $25\sqrt{3}\,cm^2$

2. a) $\approx 11,3\,m$ b) $\approx 12,7\,m$ c) $\approx 1,06\,km$ d) $\approx 7,8$ cuadras

3. a) 10 b) $4\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $30°$ f) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

4. a)

   I) $b \approx 19,204 \quad h \approx 22,645 \quad \beta = 58°$

   II) $b \approx 20,808 \quad a \approx 18,736 \quad \beta = 48°$

   III) $h \approx 37,696 \quad \alpha \approx 21°48'5'' \quad \beta \approx 68°11'55''$

IV) $b \approx 112,076$ $\alpha \approx 39°22'54''$ $\beta \approx 50°37'6''$

b) $\approx 87,19\,m$ c) $\approx 523,5\,m$ d) $\approx 9,74\,m$

5. a) $2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{19}$ c) $30°$, $30°$ y $120°$ d) $45°$

6. a)

   I) $\alpha \approx 56°22'$ $\beta \approx 45°14'51''$ $\gamma \approx 78°23'9''$

   II) $b \approx 15,91$ $c \approx 7,79$ $\alpha = 69°$

   III) $c \approx 8,19$ $\alpha \approx 47°47'$ $\beta \approx 72°13'$

   b) $\approx 12,28\,cm^2$ c) $AC \approx 4,34\,cm$ y $BC \approx 8,68\,cm$

   d) $\approx 16,22$ e) $\approx 34°19'$