Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CURSO DE INGRESO 2019
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

MATEMÁTICA

Material de apoyo para el curso de Nivelación de Matemática para los ingresantes a las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

Cecilia Gonzalez, Horacio Caraballo. La Plata noviembre de 2015.

Andrés Manceñido, editor y revisor 2017 y 2018.

Andrea N. Bermúdez Cicchino, editora y revisora 2019.

Índice

Introducción

La matemática es la materia central de todas las ciencias exactas. Es el lenguaje básico y universal de éstas y es la herramienta principal que los ingenieros utilizan para resolver todo tipo de problemas.

Ustedes, como futuros ingenieros agrónomos y forestales se enfrentarán, en mayor o menor medida, con objetos y operaciones matemáticas a lo largo de toda su vida profesional: desde el cálculo del rendimiento de una cosecha, hasta la estimación de la dinámica poblacional de las especies de un pequeño ecosistema, pasando por el cálculo de la mezcla óptima de alimentos para suministrar al ganado para lograr el mejor rendimiento o la realización de un inventario forestal de un rodal y el análisis de sus patrones de crecimiento.

En esta guía se presentan, de forma sintética, los contenidos mínimos de matemática que los alumnos deben manejar para poder transitar, de la mejor forma, las materias de los primeros años de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal.

En particular, estos contenidos son esenciales para poder cursar la materia de Matemática (materia anual de 1er año, común a ambas carreras) y por lo tanto es *necesaria* la aprobación de este curso para poder cursarla.

Los temas aquí presentados corresponden a contenidos que no deberían ser desconocidos para ustedes ya que seguramente los hayan visto a lo largo de su vida en los diversos niveles escolares. Estos contenidos serán dados por sabido por los profesores de las distintas materias de la carrera, así que este es el momento de repasarlos!

Objetivos generales

Los objetivos de este curso son que los estudiantes:

- Comprendan los temas básicos de matemática que han visto a lo largo de los años (y eventualmente adquiera algunos conocimientos nuevos).
- Desarrollen habilidades para la resolución de operaciones y problemas de matemática básicos.
- Se familiaricen con la lectura de textos de matemática para la comprensión de los temas.
- Desarrollen habilidades de comunicación propias del lenguaje científico de las matemáticas a partir del intercambio y discusión entre pares y con el docente.
- Logren una inserción plena en la vida universitaria a partir de desarrollar mayores niveles de autonomía como estudiantes que se implican activamente en los espacios formativos que la universidad les ofrece.

Información del curso

Este curso contará con un total de 8 clases de 5 horas que se dictarán durante el mes de Febrero. Toda la información pertinente (cronograma, comisiones, aulas, fechas de evaluación, etc.) se podrá encontrar con suficiente antelación en el Aula Virtual de la página web de la FCAyF (http://aulavirtual.agro.unlp.edu.ar/), ingresando en la sección Ingreso ▷ Matemática.

Metodología

El curso de nivelación de matemática tendrá una modalidad práctico-teórica, en la cual los alumnos realizarán una lectura del material e intentarán resolver una serie de ejercicios (determinados por el docente), trabajando en grupos y consultando al profesor si les surgiesen dudas que no puedan resolver con ayuda de sus compañeros. El profesor realizará algunas explicaciones en el pizarrón cuando crea pertinente, ya sea para realizar alguna aclaración general o a modo de resumen y discusión del tema luego de que los alumnos hayan trabajado con el material.

Se pretende de esta forma incentivar el trabajo en grupo y la comprensión de los textos de matemática, así como también promover la iniciativa y autonomía de los alumnos (características esenciales para el éxito en la vida universitaria).

Durante el horario de cursada no se resolverán todos los ejercicios de la guía, si no que se intentará resolver un subconjunto de los mismos, de forma de abarcar los distintos temas del día, dejando el resto de los ejercicios para que los alumnos completen en sus casas.

Evaluaciones

La aprobación del curso quedará determinada por la aprobación de un examen en alguna de las siguientes modalidades:

- Evaluación libre (previa al curso): será durante el mes de Diciembre y no contará con instancia de recuperación.
- Promoción (durante el curso): Se tomarán dos evaluaciones durante el curso de Febrero (una a mitad del mismo, donde se evaluará la primera mitad de los temas, y otra al finalizar el mismo, donde se evaluarán los temas restantes). Estas evaluaciones no contarán con instancia de recuperación y deberán aprobarse ambas con un mínimo del **40 %** del puntaje pero se deberá obtener **un puntaje promedio entre ambas** del **60 %** como mínimo para obtener la promoción.
- Evaluación (finalizado el curso): Los alumnos que por cualquier razón no aprueben la promoción y/o la fecha libre podrán rendir la evaluación **completa** en la semana siguiente a la finalización del curso (principios de Marzo). Dicha evaluación contará con **una** fecha de recuperación la semana siguiente.

En cualquiera de los casos será necesario obtener como mínimo un **60 %** del puntaje para la aprobación de la evaluación.

Cabe destacar que en todas estas evaluaciones **no podrá utilizarse calculadora** ni ningún otro tipo de artefacto electrónico.

Los alumnos que no aprueben en alguna de estas instancias no podrán cursar la materia *Matemática* (de 1er año) y deberán inscribirse en un redictado del curso de nivelación de matemática que se dictará en modalidad extendida durante el primer cuatrimestre (Abril-Junio).

Sobre esta guía

La presente tiene la intención de ser una guía que ayude a la comprensión de los temas mediante explicaciones lo más claras y completas posibles y promueva la autonomía del estudiante al servirle como un material completo de consulta. La actual guía es un trabajo en continuo desarrollo, y como tal notarán que puede estar sujeta a muchas mejoras y que algunas secciones se encuentran más elaboradas que otras.

Los invitamos a ustedes, como usuarios actuales de la guía, a hacernos llegar cualquier comentario que tengan sobre como mejorarla y a avisarnos si encuentran algún error. Ayúdennos a mejorar la guía para los futuros ingresantes!

1. Conjuntos numéricos y Operaciones elementales

Objetivos: Repasar los conjuntos numéricos y las distintas operaciones que en ellos están definidas.

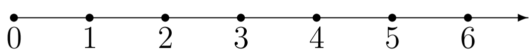
1.1. Números Naturales ($\mathbb{N}$)

El primer conjunto numérico que analizaremos es el de los **números naturales**. Este es el conjunto de números que usamos para contar y lo representaremos con la letra **N**. Como conjunto podríamos representarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$ [*]

Este conjunto tiene un primer elemento (el 0) y tiene un orden implícito, en el cual cada número es menor que los siguientes y mayor que los anteriores. Por ejemplo 3 es menor que 6 (y lo denotamos $3 < 6$) y por otro lado es mayor que 1 ($3 > 1$). Sin embargo, este conjunto no tiene un último elemento, es decir que no hay un número natural que sea mayor que todos los demás (y por eso los puntos suspensivos en la notación de conjunto).

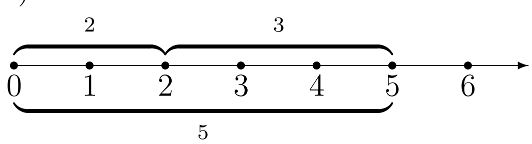
Este orden permite representar a los números naturales como puntos aislados sobre una recta. En su extremo izquierdo ubicamos al 0 y hacia la derecha, separados entre si en una misma distancia arbitraria, se encuentran el resto de los números, en orden creciente. Esto es:



1.1.1. Operaciones en $\mathbb{N}$

Suma La suma es una operación que logra reunir a varios números en uno sólo. A cada número que forma parte de la suma se lo llama **sumando**.

Se puede interpretar a la suma de dos números naturales como un movimiento sobre la recta que vimos anteriormente. Por ejemplo $2+3$ sería equivalente a moverse 3 unidades hacia la derecha a partir del 2, con lo cual terminaríamos en el 5 (que es el resultado de la suma):



Propiedades de la suma:

- **Cerrada:** La suma de dos (o más) números naturales da como resultado un número natural. En lenguaje matemático diremos que si a y $b \in \mathbb{N}$[**] entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}}$$

[*]Algunos matemáticos prefieren no incluir al 0 entre los números naturales, pero en este caso sí lo incluiremos, para utilizarlo en muchas de las propiedades que enunciaremos.

[**]El símbolo $\in$ se lee como "pertenece" y quiere decir que el número en cuestión está en ese conjunto. Por ejemplo cuando escribimos $a \in \mathbb{N}$ queremos decir que a es un número natural.

Ejemplo: $$\overbrace{2}^{\in\mathbb{N}}+\overbrace{4}^{\in\mathbb{N}} = \overbrace{6}^{\in\mathbb{N}}$$

- **Conmutativa:** El orden de los sumandos no altera a la suma. Escrito en lenguaje matemático, si a y $b \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{a+b=b+a}}$$

Ejemplo:
$$\begin{array}{rcl} 5+3 & & 3+5 \\ 8 & = & 8 \end{array}$$

Asociativa

- **Asociativa:** El resultado de la suma no se ve alterado por el modo de agrupar los sumandos. Es decir que si a, b y $c \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}}$$

Ejemplo:
$$\begin{array}{rcl} (1+4)+7 & & 1+(4+7) \\ 5+7 & & 1+11 \\ 12 & = & 12 \end{array}$$

Notación: Como consecuencia de esta propiedad, pueden omitirse los paréntesis cuando haya varios sumandos (siempre y cuando no haya otras operaciones involucradas). Por ejemplo lo anterior se podría haber escrito directamente como $1+4+7=12$.

Elemento neutro (0)

- **Elemento neutro (0):** El 0 es el neutro de la suma, ya que cualquier número sumado a 0 da el mismo número. Es decir, para todo $a \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a+0=a}}$$

Ejemplo: $$3+0=3$$

Resta La resta en los números naturales no está bien definida, ya que no toda resta de números naturales da como resultado un número natural (y por lo tanto no toda resta se puede efectuar dentro de este conjunto).

Ejemplos: $7-4=3$ pero $3-5$ no se puede calcular en $\mathbb{N}$

Producto El resultado de un producto de dos números naturales se puede pensar como sumar uno de los números tantas veces como el otro número. A cada uno de los elementos que forma parte de un producto se lo denomina **factor**. **Factor**

Ejemplo: $$3\cdot 4 = \underbrace{4+4+4}_{\text{3 veces}} = 12$$

Notación: Muchas veces en matemática se omite el símbolo "·" de la multiplicación (sobre todo cuando se trabaja con paréntesis o con letras). De esta forma, por ejemplo, se podría escribir indistintamente:

$$2\cdot b+1 \quad \text{o} \quad 2b+1 \qquad\qquad 3\cdot(x-a) \quad \text{o} \quad 3(x-a)$$

Propiedades del producto

Propiedades del producto:

Cerrado

- **Cerrado:** El producto de dos (o más) números naturales da como resultado un número natural. Escrito en lenguaje matemático:

$$\boxed{\text{Si } \boldsymbol{a} \text{ y } \boldsymbol{b} \in \mathbb{N} \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo:

$$\overbrace{5}^{\in\mathbb{N}} \cdot \overbrace{2}^{\in\mathbb{N}} = \overbrace{10}^{\in\mathbb{N}}$$

Conmutativo

- **Conmutativo:** El orden de los factores no altera al producto. Escrito en lenguaje matemático, si a y $b \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 7 & & 7 \cdot 3 \\ 21 & = & 21 \end{array}$$

Asociativo

- **Asociativo:** El resultado del producto no se ve alterado por el modo de agrupar los factores. Es decir que si a, b y $c \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} (3 \cdot 5) \cdot 2 & & 3 \cdot (5 \cdot 2) \\ 15 \cdot 2 & & 3 \cdot 10 \\ 30 & = & 30 \end{array}$$

Notación: En este caso también pueden omitirse los paréntesis. Por ejemplo lo anterior se podría haber escrito directamente como $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

- **Elemento neutro (1):** El 1 es el neutro del producto, ya que cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número. Es decir, para todo $a \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{a}}$$

Ejemplo:

$$13 \cdot 1 = 13$$

- **Distributivo respecto a la suma:** El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada sumando. En otras palabras, si a, b y $c \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}\ ^{*}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 4(2+5) & & 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 & & 8 + 20 \\ 28 & = & 28 \end{array}$$

*Al proceso inverso de usar la propiedad distributiva se lo llama **sacar factor común** (y ya veremos que es muy útil en mucho casos). Por ejemplo: $\boldsymbol{2x + kx = x(2+k)}$

En expresiones compuestas, como las anteriores (con sumas, productos, potencias, etc.) se llama **término** a cada una de las porciones de ésta que se encuentran separadas por operaciones de suma (o resta).

Será de suma importancia saber identificar términos y factores (cada elemento que forma parte de un producto) de una expresión para poder operar con ella correctamente.

Ejemplos:

La expresión $12+17\cdot 5+8$ tiene tres términos. El segundo término consta de dos factores.

La expresión $2\cdot(3+6+2)$ así escrita tiene un sólo término, compuesto por dos factores.

Notación: En matemática es importante el correcto uso de los paréntesis, ya que a veces la presencia (o ausencia) de los mismos puede simbolizar expresiones muy diferentes. Por ejemplo:

$$3\cdot(2+4)+1=\overbrace{3\cdot(2+4)}^{\text{térm.}}+\overbrace{1}^{\text{térm.}}=19$$

$$3\cdot 2+4+1=\overbrace{3\cdot 2}^{\text{térm.}}+\overbrace{4}^{\text{térm.}}+\overbrace{1}^{\text{térm.}}=11$$

En las expresiones compuestas, las operaciones elementales tiene un orden de prioridad a la hora de realizar los cálculos. En principio, si una expresión no tiene paréntesis (o corchetes o algún otro tipo de símbolo matemático utilizado para agrupar elementos), el orden en que se deben realizar las operaciones es el siguiente*:

1° Potencias (o raíces)

2° Productos (o divisiones)

3° Sumas (o restas)

En caso de que existan paréntesis (o algún otro tipo de agrupación) deberá respetarse el orden de éstos, operando de "adentro hacia afuera" y respetando el orden de las operaciones dentro de cada paréntesis (claro que también podrá utilizarse la propiedad distributiva en caso de ser aplicable).

Una consecuencia de ésto es que para poder realizar una operación de forma correcta será necesario primero resolver cada término y por último realizar las sumas (o restas) de los resultados.

Ejemplos:

$$2\cdot 3+5\cdot 2+2\cdot 4+1=\overbrace{2\cdot 3}+\overbrace{5\cdot 2}+\overbrace{2\cdot 4}+\overbrace{1}=6+10+8+1=\boxed{25}$$

$$(1+5)\cdot 2+4\cdot 3+7=\overbrace{\mathbf{(1+5)}\cdot 2}+\overbrace{4\cdot 3}+\overbrace{7}=\overbrace{\mathbf{6}\cdot 2}+\overbrace{4\cdot 3}+\overbrace{7}=12+12+7=\boxed{31}$$

*Si bien en esta lista aparecen algunas operaciones que todavía no hemos visto (y algunas ni siquiera están bien definidas en $\mathbb{N}$) las incluimos aquí para que la lista sea completa.

División La división es también una operación no del todo completa en el conjunto de los números naturales, en el sentido de que no toda división da como resultado un número natural.

Ejemplos:

6 dividido 3 es 2, pero 5 dividido 2 no se puede realizar en $\mathbb{N}$

Sin embargo, se puede definir el **algoritmo de la división**, que nos dará como resultado dos números naturales: el **cociente** y el **resto**.

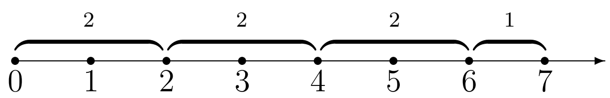
El algoritmo de la división asegura que dados dos números naturales a (**dividendo**) y b (**divisor**), con $b \neq 0$, existen dos únicos números naturales q (**cociente**) y r (**resto**) tales que $\boldsymbol{a = b \cdot q + r}$, con $\boldsymbol{r < b}$.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{7}^{\text{Dividendo}} & \overbrace{2}^{\text{Divisor}} \\ \cline{2-2} -\ 6 & \underbrace{3}_{\text{Cociente}} \\ \cline{1-1} \underbrace{1}_{\text{Resto}} & \end{array}$$

Entonces: $\underbrace{7}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{2}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Cociente}} + \underbrace{1}_{\text{Resto}}$

El cociente se puede interpretar como la cantidad de veces que entra el divisor en el dividendo (como máximo) y el resto se puede interpretar como lo que falta todavía para alcanzar al dividendo. Esto se puede interpretar gráficamente pensando en la recta que vimos anteriormente, que pensando en el ejemplo anterior sería:



Se puede ver que el 2 entra como máximo 3 veces en el 7, pero todavía falta 1 más para llegar a 7.

Divisibilidad:

Si el resto de la división es 0, entonces nos queda que $a = b \cdot q$ y en ese caso se dice que a es **divisible** por b. También podría decirse que a es **múltiplo** de b, que b **divide** a a, que b es **divisor** de a o que b es **factor** de a.

Ejemplo: Si dividimos a 28 por 4 nos da cociente 7 y resto 0. Por lo tanto $28 = 4 \cdot 7$. Entonces podemos decir que 28 es divisible por 4, o que 28 es múltiplo de 4, o que 4 divide a 28, o que 4 es divisor de 28 o que 4 es factor de 28.

Números primos:

Un número natural (mayor que 1) se dice que es un **número primo** si sus únicos divisores naturales son el 1 y él mismo.

Existen infinitos números primos, pero los primeros 10 números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Potenciación La potenciación de números naturales se puede definir como multiplicar por si mismo una cierta cantidad de veces un mismo factor. Al número que estamos multiplicando se llama **base** de la potencia y al número que indica la cantidad de veces que se multiplicará el otro se lo llama **exponente** de la potencia.

Ejemplo: $$3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ veces}}$$

Que se lee como "tres elevado a la cinco" o "tres a la quinta".

En general, si a y $n \in \mathbb{N}$ se define la potencia n-ésima de a como:

Definición de potencia en ℕ

$$\boxed{\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}}}$$

Propiedades de la potencia (en $\mathbb{N}$):

Propiedades de la potencia

Exponente 1

- **Exponente 1:** Todo número elevado a la 1 es igual al mismo número, es decir que para todo $a \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{\boldsymbol{a^1 = a}}$$
Ejemplo: $$5^1 = 5$$

- **Exponente 0:** Todo número (distinto de cero) elevado a la 0 da 1, es decir que para todo $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$: **Exponente 0**
$$\boxed{\boldsymbol{a^0 = 1}}$$
Ejemplo: $$3^0 = 1$$

- **Producto de potencias de igual base:** El producto de potencias de igual base es una nueva potencia, con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes. En otras palabras, si a, m y $n \in \mathbb{N}$ entonces: **Producto de potencias de igual base**
$$\boxed{\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}}$$
Ejemplo: $$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$

- **Potencia de potencia:** Una potencia de una potencia es una nueva potencia (de igual base) y cuyo exponente es el producto de los exponentes. Es decir, si a, m y $n \in \mathbb{N}$ entonces: **Potencia de potencia**
$$\boxed{\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}}$$
Ejemplo: $$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

- **Distributiva respecto al producto:** La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores. En otras palabras, si a, b y $n \in \mathbb{N}$ entonces: **Distributiva respecto al producto**
$$\boxed{\boldsymbol{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}}$$
Ejemplo: $$(3 \cdot 7)^3 = 3^3 \cdot 7^3$$

Notación: Es muy importante el correcto uso de los paréntesis, porque la presencia (o ausencia) de ellos puede simbolizar cosas distintas y llevar a distintos resultados. Por ejemplo:

$$(\mathbf{2}\cdot\mathbf{3})^2 = (\mathbf{2}\cdot\mathbf{3})\cdot(\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}) = 6\cdot 6 = 36 \quad \text{no es lo mismo que} \quad 2\cdot\mathbf{3}^2 = 2\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{3} = 2\cdot 9 = 18$$

Aclaración: $(a+b)^m$ **no es igual a** a^m+b^m, del mismo modo $(a-b)^m$ **no es igual a** a^m-b^m *(es decir que la potencia* <u>no</u> *es distributiva respecto de la suma o la resta)*

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} (2+3)^2 & & 2^2+3^2 \\ 5^2 & & 4+9 \\ 25 & \neq & 13 \end{array}$$

En particular, si se desarrolla el **cuadrado de un binomio** de la forma $(a+b)^2$ se obtiene un trinomio de la forma $a^2+2ab+b^2$ llamado **trinomio cuadrado perfecto**.[*]

Demostración:

Desarrollo del cuadrado de un binomio

$$\boxed{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = \boxed{a^2+2ab+b^2}$$

Ejemplo: $(2+3)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3 + 3^2 = 4+12+9 = 25$

<u>Descomposición en factores primos:</u>

Todo número natural se puede escribir de forma única como un producto de números primos. A este proceso se lo llama **descomposición en factores primos**, descomposición prima, descomposición factorial o a veces simplemente factorización.

Para lograr esto se suele dividir al número sucesivamente por sus divisores primos (generalmente en orden creciente), hasta que el cociente sea 1. Una forma de hacerlo es la siguiente:

- Se coloca el número a descomponer, seguido de una gran raya vertical.
- Luego se lo divide por el primer divisor primo que le encontremos (anotándolo a la derecha de la raya vertical) y se anota el cociente debajo del número original.
- Dividimos ahora el cociente obtenido por el primer divisor primo que le encontremos y repetimos el proceso hasta que el cociente sea 1.
- Por último, la descomposición en factores primos del número buscado será el producto de todos los divisores que escribimos en la columna de la derecha.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 60 & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & \\ & \\ & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \\ & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$ y esa es su descomposición en factores primos.

[*]Si en lugar de $(a+b)^2$ hubiera sido $(a-b)^2$ el desarrollo hubiera quedado $a^2-2ab+b^2$

Mínimo Común Múltiplo:

Se llama **mínimo común múltiplo** (que de ahora en más denotaremos MCM) de dos o más números naturales al menor número natural que es múltiplo de ellos. Para encontrar dicho número se puede seguir el siguiente método:

Mínimo Común Múltiplo

- Se encuentra la descomposición en factores primos de cada uno de los números.
- Se toma cada factor primo que aparezca en alguna de las descomposiciones (ya sea que esté repetido o no) elevado a su mayor exponente.

Ejemplo:

Para hallar el MCM entre 60, 8 y 18 (que podremos denotar como MCM$(60, 8, 18)$) lo primero que hacemos es encontrar sus descomposiciones en factores primos:

60	2	8	2	18	2	
30	2	4	2	9	3	Por lo tanto:
15	3	2	2	3	3	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
5	5	1		1		$8 = 2^3$
1						$18 = 2 \cdot 3^2$

Los únicos factores primos que aparecen en estas descomposiciones son 2, 3 y 5. Además, el máximo exponente a que aparece elevado el 2 es 3, el máximo exponente a que aparece elevado el 3 es 2 y el máximo exponente a que aparece levado el 5 es 1. Por lo tanto el $\boxed{\text{MCM}(60, 8, 18) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360}$

Aclaración: El MCM de dos o más números **nunca podrá ser menor que cualquiera de ellos**. A lo sumo podrá ser igual a alguno de ellos, si es que éste es múltiplo de todos los demás. Por ejemplo, el MCM$(2, 16, 8) = 16$, ya que 16 es múltiplo de 8 y de 2.

1.2. Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

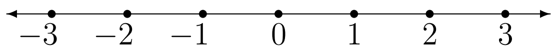
Cuando hablamos de la resta en el conjunto de los números naturales (pág. 11) dijimos que no era una operación bien definida en dicho conjunto ya que no podíamos realizar la operación para cualquier par de números naturales. Por ejemplo $3 - 4$ no es una operación que se pueda realizar en $\mathbb{N}$. Es esto lo que motivó a la creación de otro tipo de números, que son los números negativos $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Éstos, junto a los naturales, forman lo que se conoce como el conjunto de los **números enteros** y lo representaremos con la letra $\mathbb{Z}$. Como conjunto podríamos representarlo de la siguiente forma:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

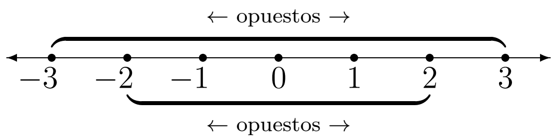
Nótese que este conjunto conserva la idea de orden que tenía el conjunto de los naturales, pero a diferencia de éste, no tiene un primer elemento (es decir un número que sea menor que todos los demás. Por eso en la notación de conjunto usamos puntos suspensivos en ambos extremos.

Podemos extender la representación gráfica del conjunto, sólo que ahora la recta no tendrá un principio, si no que se extenderá indefinidamente en ambas direcciones.

En algún punto arbitrario de la misma colocaremos el 0 y hacia su derecha seguirán estando los números naturales (que son enteros positivos) y a su izquierda los números negativos (cada uno separado una misma distancia arbitraria). Esto es:



En esta representación, podemos ver que cada número tiene un par que le corresponde y está ubicado a la misma distancia que él del 0, pero del lado opuesto. Es entonces lógico pensar en llamar a ese número su **opuesto** y lo denotaremos como el mismo número, pero con un "−" adelante. Es decir que dado un número entero a su opuesto será $-a$. Por ejemplo, -2 es el opuesto de 2 y 3 es el opuesto de -3:



Observación: El 0 es el único número que es igual a su opuesto (y por lo tanto puede decirse que no tiene signo, es decir que no es ni positivo ni negativo).

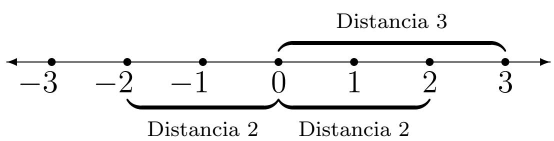
Valor absoluto:

Se llama **valor absoluto** de un número a dicho número sin considerar su signo y lo denotaremos con el número encerrado entre "| |". En un lenguaje un poco más formal definiremos al valor absoluto de un número entero a como:

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \text{si } \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a} & \text{si } \boldsymbol{a} < \boldsymbol{0} \end{cases}}\ {}^{*}$$

Ejemplos: $|3| = 3$ $\qquad |-2| = 2$ $\qquad |2| = 2$

Por definición entones, el valor absoluto de un número es un valor **siempre positivo**, y puede interpretarse como la distancia que hay desde el número hasta el cero. Representando esto en base a los ejemplos anteriores:



*Nótese que esta definición nos dice que si el número al que le estamos calculando su valor absoluto es positivo, lo dejamos como está, pero si el número es negativo el valor absoluto nos devuelve su opuesto, es decir el mismo número, pero sin su signo (cosa que ya habíamos definido más arriba, de manera menos formal)

1.2.1. Operaciones en $\mathbb{Z}$

Suma (y Resta) La suma hereda en $\mathbb{Z}$ todas las propiedades que tenía en $\mathbb{N}$ (y aquí esta vez simplemente las enunciaremos sin ejemplos) y tiene algunas propiedades nuevas que analizaremos en más detalle.

La resta en cambio estará ahora bien definida en $\mathbb{Z}$, pero antes de enunciar sus propiedades veremos que está íntimamente relacionada con la suma.

Propiedades de la suma:

Si a, b y $c \in \mathbb{Z}$ entonces:

- **Cerrada: $a + b \in \mathbb{Z}$**
- **Conmutativa: $a + b = b + a$** **onmutativa**
- **Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$** **Asociativa**
- **Elemento neutro (0): $a + 0 = a$**
- **Opuesto:** Como ya dijimos, en $\mathbb{Z}$ cada número tiene un opuesto, pero además cada número sumado a su opuesto da 0. En otras palabras, para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe su opuesto $-a \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\boxed{\boldsymbol{a + (-a) = 0}}$$

Ejemplo: $$5 + (-5) = 0$$

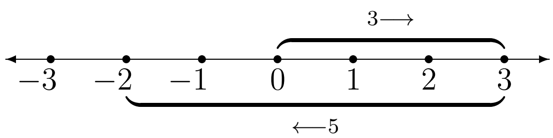
Una consecuencia de esto es que se puede pensar a la resta como la suma de un opuesto. Una ventaja de esto es que al pensarlo así no es necesario definir una nueva operación (la resta) y que podemos utilizar todas las propiedades de la suma antes mencionadas.

Aclaración: Si bien la resta no es conmutativa ($2 - 3 \neq 3 - 2$), si la pensamos como suma de un opuesto entonces si lo es (siempre y cuando mantengamos el signo acompañando al número que corresponde).

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 3-5 & & 5-3 & \text{pero} & 3+(-5) & & (-5)+3 \\ -2 & \neq & 2 & & -2 & = & -2 \end{array}$$

Podemos además seguir interpretando a la suma como un movimiento sobre la recta (de forma similar a lo que vimos en $\mathbb{N}$), pero en este caso si restamos (o sumamos un número negativo) nos tendríamos que mover hacia la izquierda. Por ejemplo, $3 - 5$ sería moverse 5 unidades hacia la izquierda a partir del 3, con lo cual terminaríamos en -2 (que es el resultado):



Producto El producto hereda en $\mathbb{Z}$ todas las propiedades que tenía en $\mathbb{N}$. Además se agrega la regla de los signos para el producto, que veremos con un poco más de detalle.

Propiedades del producto: **Propi del p**

Si a, b y $c \in \mathbb{Z}$ entonces:

- **Cerrado:** $\boldsymbol{a \cdot b \in \mathbb{Z}}$ **Cerrado**
- **Conmutativo:** $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$ **Conmutativo**
- **Asociativo:** $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$ **Asociativo**
- **Elemento neutro (1):** $\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$ **Neu**
- **Distributivo respecto a la suma:** $\boldsymbol{a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$
- **Regla de los signos:** El producto de dos enteros del mismo signo es un número positivo, y el producto de dos enteros de distinto signo es un número negativo. En resumen:

Producto	Resultado
$+$ por $+$	$+$
$-$ por $-$	$+$
$+$ por $-$	$-$
$-$ por $+$	$-$

Ejemplos: $2 \cdot 3 = 6$ $\quad (-2) \cdot (-3) = 6$ $\quad 2 \cdot (-3) = -6$ $\quad (-2) \cdot 3 = 6$

Notación: Cuando trabajamos con números negativos es esencial utilizar los paréntesis de forma adecuada para no cometer errores. Por ejemplo, si queremos escribir el producto de 2 por -3 tendremos que poner $2 \cdot (-3)$ (o de forma más reducida $2(-3)$), pero no $2 \cdot -3$ porque podría confundirse con una resta.

Sin embargo, cuando el número negativo es el primer factor pueden omitirse los paréntesis. Por ejemplo $(-2) \cdot 3$ podría escribirse directamente $-2 \cdot 3$.

División La división sigue siendo una operación que no siempre puede realizarse en el conjunto de los números enteros. Sin embargo, cuando pueda realizarse (es decir cuando un número sea divisible por otro), deberá seguirse la misma **regla de los signos** que para el producto.

Ejemplos: -6 dividido 2 es -3 $\quad -6$ dividido -2 es 3

También sigue pudiendo aplicarse el **algoritmo de la división** (con una pequeña variante en la condición impuesta al resto). Éste asegura que dados dos números enteros a (**dividendo**) y b (**divisor**), con $b \neq 0$, existen dos únicos números enteros q (**cociente**) y r (**resto**) tales que $\boldsymbol{a = b \cdot q + r}$, con $\boldsymbol{0 \leq r < |b|}$.

Potenciación La potenciación de exponente <u>natural</u> y base entera sigue teniendo la misma definición y propiedades que en $\mathbb{N}$. Además habrá que tener cuidado con el signo del resultado (consecuencia de la regla de los signos del producto).

Definición de potencia en $\mathbb{Z}$

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define la potencia n-ésima de a como:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}}}$$

Ejemplos:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \qquad (-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

Notación: Cuando trabajamos con potencias de base negativa es importante el correcto uso de los paréntesis, ya que a veces la presencia (o ausencia) de los mismos puede simbolizar expresiones muy diferentes. Por ejemplo:

$$(\mathbf{-2})^2 = (\mathbf{-2}) \cdot (\mathbf{-2}) = 4 \quad \text{no es lo mismo que} \quad -\mathbf{2}^2 = -\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = -4$$

Propiedades de la potencia

<u>Propiedades de la potencia (en $\mathbb{Z}$):</u>

Si a y $b \in \mathbb{Z}$ y n y $m \in \mathbb{N}$ entonces:

Exponente 1

- **Exponente 1: $a^1 = a$**

Exponente 0

- **Exponente 0: $a^0 = 1$** (para $a \neq 0$)

Producto de potencias

- **Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$**

...cia de ...tencia

- **Potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$**

Distributiva resp al producto

- **Distributiva respecto al producto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$**
- **Signo de la potencia:** Debido a la regla de los signos para el producto uno puede saber el signo del resultado de una potencia en base al signo de la base y la paridad del exponente. Los exponentes pares darán siempre resultados positivos y los exponentes impares darán resultados que conservarán el signo de la base. En resúmen:

Base	Exponente	Resultado
$+$	par	$+$
$-$	par	$+$
$+$	impar	$+$
$-$	impar	$-$

Ejemplos:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

1.3. Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Hasta ahora vimos conjuntos donde la división no estaba bien definida (es decir que no siempre podíamos dividir dos números del mismo conjunto y que nos diera un resultado dentro del mismo conjunto). Esto es consecuencia de que los números enteros (y los naturales también, ya que son un subconjunto de éstos) se encuentran "separados" entre si una misma distancia: la unidad. Es decir, se puede pasar de un entero a su siguiente sumándole 1 (o a su anterior restándole 1), pero no habrá ningún numero entero entre éstos.

Surge entonces la idea de poder dividir a la unidad en porciones más pequeñas y es así que surge la idea de las **fracciones**. Por ejemplo, podemos dividir a la unidad en tres partes iguales y cada una de ellas sería $\frac{1}{3}$. Podemos luego tomar dos de estas partes y tendríamos $\frac{2}{3}$ o tomar cinco de estas partes y tener $\frac{5}{3}$. También podríamos haber dividido a la unidad en cuatro partes iguales y cada una de ellas sería $\frac{1}{4}$, pudiéndolas tomar por ejemplo de a tres para obtener $\frac{3}{4}$. También podríamos incluir el opuesto de esta última, que sería $-\frac{3}{4}$.

Serán estas fracciones las que formen el conjunto de los **números racionales**, que representaremos con la letra $\mathbb{Q}$. En la notación de conjunto podríamos escribirlo como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ tales que } m \text{ y } n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0 \right\}$$

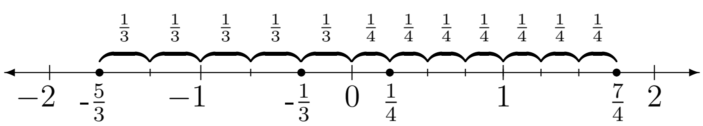
Al número inferior lo llamaremos **denominador** y nos dirá en cuántas partes **Denominador** hay que dividir a la unidad (y por lo tanto no podrá ser 0, ya que **no se puede dividir por 0**) y al número superior lo llamaremos **numerador** y nos dirá cuántas de estas partes deberemos tomar.

Técnicamente los números enteros también son racionales, ya que cualquier número entero a se puede pensar como $\frac{a}{1}$. Por ejemplo, $5 \in \mathbb{Q}$ ya que $5 = \frac{5}{1}$ (y 5 y $1 \in \mathbb{Z}$).

Notación: Debido a la regla de los signos para la división, las expresiones $\frac{-2}{5}$ y $\frac{2}{-5}$ son equivalentes a la expresión $-\frac{2}{5}$, y esta última suele ser la más utilizada. Por otro lado (y debido a la misma razón) la expresión $\frac{-3}{-2}$ es equivalente a la expresión $\frac{3}{2}$.

Todo número racional podrá escribirse también en **forma decimal**, ya sea con decimales **exactos** (es decir con parte decimal finita), como por ejemplo $\frac{3}{2} = 1,5$, o con decimales **periódicos** (que se repiten en una determinada secuencia indefinidamente), como por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.\widehat{3} = 0{,}333333...$.

Podemos seguir representando a los números racionales sobre una recta, pero ahora esta estará poblada de infinidad de números* y ya no separados por una misma distancia. Para ubicar un número racional sobre esta recta tendremos que dividir a la unidad según la cantidad que indique el denominador y tomar tantas de estas partes como indique el numerador (teniendo en cuenta además el signo de la fracción, para saber en que dirección respecto al 0 hay que dirigirse). Por ejemplo:



*Sin embargo todavía no estarán todos los puntos de la recta.

Fracciones equivalentes:

En general existen infinitas formas de representar una determinada fracción. Por ejemplo, si cortamos una pizza de la forma tradicional (8 porciones) cada porción representará $\frac{1}{8}$ de pizza. Ahora bien, si nos comemos 4 de estas porciones habremos comido $\frac{4}{8}$ de pizza, pero será lo mismo que decir que comimos $\frac{1}{2}$ de pizza.

A todas las fracciones que representen un mismo número racional las llamaremos **fracciones equivalentes**. Para obtener fracciones equivalentes a partir de una fracción dada podemos multiplicar (o dividir) tanto el numerador como el denominador por un mismo número (distinto de 0).

Ejemplo: $$\frac{3}{2}=\frac{3\cdot\mathbf{2}}{2\cdot\mathbf{2}}=\frac{6}{4} \quad \text{o} \quad \frac{3}{2}=\frac{3\cdot\mathbf{5}}{2\cdot\mathbf{5}}=\frac{15}{10} \quad \text{o} \quad \frac{3}{2}=\frac{3\cdot\mathbf{(-3)}}{2\cdot\mathbf{(-3)}}=\frac{-9}{-6}=\frac{9}{6}$$

Si en lugar de multiplicar hubiéramos dividido en numerador y el denominador por un mismo número (que sea divisor de ambos y que no sea 0) también estaríamos obteniendo fracciones equivalentes, pero a ese proceso se lo suele llamar **simplificación** de una fracción. Este proceso puede realizarse en un solo paso, o en varios pasos sucesivos. Además, el proceso de simplificación se podrá seguir hasta que el numerador y el denominador no tengan factores primos en común. A este tipo de fracciones las llamaremos **fracciones irreducibles***

Ejemplos: $$\frac{16}{40}=\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{40}}}=\frac{2}{5} \qquad \frac{32}{12}=\frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\underset{6}{\cancel{12}}}=\frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{8}{3}$$

Aclaración: Nótese que si se cancela completamente el numerador deberemos dejar un 1 en su lugar, ya que al dividir un número por si mismo el cociente es 1. Con el denominador pasaría lo mismo, pero en ese caso no será necesario escribirlo, porque las fracciones con denominador 1 son números enteros.

Ejemplos: $$\frac{4}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{1}{3} \qquad \frac{30}{6}=\frac{\overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{6}}}=\frac{6}{1}=6$$

1.3.1. Operaciones en $\mathbb{Q}$

Suma (y Resta) Para sumar (o restar) dos números racionales podremos hacerlo de forma sencilla si ambos tienen **el mismo denominador** (ya que estaremos sumando "porciones del mismo tamaño"). Por ejemplo, tres porciones de pizza más seis porciones de pizza son nueve porciones de pizza. Esto mismo en notación de fracciones sería:
$$\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=\frac{3+6}{8}=\frac{9}{8}$$

*En general será preferible trabajar con este tipo de fracciones para que las cuentas sean más sencillas de realizar. Por lo tanto es recomendable simplificar las fracciones antes de realizar cualquier operación con ellas.

Si queremos generalizar esto podríamos decir que si se tienen **dos fracciones de mismo denominador** (o sea $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$), entonces:

Suma de fracciones con mismo denominador

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}}$$

Ahora bien, si tenemos **dos fracciones con diferente denominador** será necesario obtener fracciones equivalentes a éstas pero que tengan entre si el mismo denominador y así luego podremos sumarlas directamente. Por ejemplo, tres porciones de pizza más un cuarto de pizza no son cuatro de nada (no puedo sumar el tres y el uno). Pero un cuarto de pizza equivale a 2 porciones de pizza, con lo cual tendremos en total 5 porciones de pizza. Esto mismo en notación fraccionaria sería:

$$\frac{3}{8} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{3}{8} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

Para encontrar el denominador común que deberán tener las fracciones deberemos usar el MCM (ver página 17) entre los denominadores de las fracciones involucradas en la suma (o resta). En el ejemplo anterior usamos un denominador común 8, ya que $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$ y por lo tanto el $\mathrm{MCM}(8,4) = 2^3 = 8$ (aunque en ese caso tan sencillo podíamos haberlo calculado sin necesidad de factorizar los denominadores).

Veamos ahora un ejemplo un poco más complicado. Supongamos que queremos restar $\frac{3}{20}$ y $\frac{8}{75}$. Primero encontraremos la descomposición en factores primos de cada uno de los denominadores, para hallar el $\mathrm{MCM}(20,75)$. Esto es:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto:
$20 = 2^2 \cdot 5$
$75 = 3 \cdot 5^2$

Entonces: $\mathrm{MCM}(20,75) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$

Esto quiere decir que deberemos encontrar fracciones de denominador 300 que sean equivalentes a las que deseamos sumar. Esto lo logramos multiplicando el numerador y denominador de cada fracción por el cociente que resulte de dividir el MCM por su denominador*. En este caso nos quedaría:

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 15}{20 \cdot 15} = \frac{45}{300} \qquad \frac{8}{75} = \frac{8 \cdot 4}{75 \cdot 4} = \frac{32}{300}$$

Y ahora que tenemos dos fracciones equivalentes a las anteriores, pero con un denominador común las sumamos directamente:

$$\frac{3}{20} - \frac{8}{75} = \frac{45}{300} - \frac{32}{300} = \frac{45-32}{300} = \frac{13}{300}$$

*Si observamos detenidamente la descomposición en factores primos de cada denominador y del MCM podremos identificar fácilmente por qué números faltaría multiplicar para obtener el denominador deseado. Por ejemplo, en la primer fracción el denominador es $2^2 \cdot 5$ y el MCM es $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, entonces está claro que faltan un 3 y un 5 (es decir un 15). En el segundo caso falta un 2^2, es decir un 4.

Si tratamos de generalizar este método nos quedará algo que parece más complejo de lo que es. Sin embargo vamos a intentar generalizarlo en el lenguaje matemático (simplemente para que la guía quede completa), pero no debemos perder de vista cual es la técnica utilizada: **llevar las fracciones a fracciones equivalentes con un denominador común para luego sumarlas (o restarlas) directamente**. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})} + \frac{\boldsymbol{c} \cdot \frac{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{\boldsymbol{d}}}{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{c} \cdot \frac{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{\boldsymbol{d}}}{\mathrm{MCM}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}}$$

<ins>Propiedades de la suma:</ins> **Prop de la**

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ entonces:

- **Cerrada:** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \in \mathbb{Q}$
- **Conmutativa:** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$
- **Asociativa:** $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}\right) + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \left(\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}\right)$
- **Elemento neutro (0):** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{0} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$
- **Opuesto:** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right) = \boldsymbol{0}$

Producto El producto de números racionales dará como resultado un nuevo número racional cuyo numerador será el producto de los numeradores y cuyo denominador será el producto de los denominadores. En otras palabras, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces: **Producto de números racionales**

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}}}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \qquad -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-2) \cdot (-3)}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$$

Esta definición nos permite establecer reglas para simplificar las fracciones *antes* de realizar el producto*. En este caso, como el nuevo numerador estará formado por el producto de los numeradores y el nuevo denominador estará formado por el producto de los denominadores, se podrá **simplificar cualquier numerador con cualquier denominador**.

Regla de simplificación para el producto de fracciones

*De todas formas nada nos impide realizar el producto y simplificar luego, pero generalmente es recomendable simplificar antes de hacer las cuentas, para trabajar con números menores.

Ejemplo:

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{12}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 3}=\frac{10}{9}$$

Propiedades del producto: **Propiedades del producto**

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ entonces:

- **Cerrado:** $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}}$ **Cerrado**
- **Conmutativo:** $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}}$ **Conmutativo**
- **Asociativo:** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)}$ **Asociativo**
- **Elemento neutro (1):** $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}}$ **Neutro (1)**
- **Distributivo respecto a la suma:** $\boldsymbol{\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+a\cdot\frac{e}{f}}$
- **Regla de los signos:** Mismo que para los números enteros (pág. 20) **Regla de los signos**
- **Existencia de inverso multiplicativo:** Todo número racional no nulo tiene un inverso multiplicativo, que al multiplicarlo por el da 1. En otras palabras, si $q\in\mathbb{Q}$ con $q\neq 0$ entonces existe su inverso multiplicativo (y lo denotaremos $\frac{1}{q}$) y cumple que:

$$\boxed{\boldsymbol{q\cdot\frac{1}{q}=1}}$$

Si escribimos esto mismo como fracciones, resulta que el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ ya que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{4}\cdot\boldsymbol{\frac{4}{3}}=\frac{12}{12}=1 \qquad -\frac{5}{2}\cdot\left(\boldsymbol{-\frac{2}{5}}\right)=\frac{10}{10}=1 \qquad \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{2}=1$$

Cálculo de porcentajes:

Una aplicación muy útil del producto de números racionales es para el cálculo de porcentajes, una operación muy común en la vida cotidiana. El símbolo que utilizamos para referirnos al porcentaje es % y siempre va precedido de algún número (10 %, 25 %, 63 %, etc.) que hace referencia a una proporción. La correcta interpretación, por ejemplo del 12 %, es 12 de cada 100 partes (de algo). Esto quiere decir que siempre que hablemos de porcentaje no sólo tenemos que hacer referencia al porcentaje en si, si no también a la cantidad de la que estamos hablando (es decir al porcentaje *de qué* nos estamos refiriendo). Por ejemplo no es lo mismo el 5 % de 240 que el 5 % de 3000000. Por lo tanto, para calcular porcentajes deberemos realizar el producto de un número racional (en este caso $\frac{12}{100}$) por otro número (que es la cantidad a la que estamos queriendo calcularle el porcentaje). Escrito en forma general, si se quiere calcular el X % de una cantidad A habría que calcular:

$$\boxed{\frac{\mathrm{X}}{\mathbf{100}}\cdot \mathrm{A}}\,^{*}$$

Ejemplo:

Supongamos que nuestro jefe nos dice que a partir del mes que viene vamos a tener un aumento del 15 % en nuestro salario (que actualmente es de \$10220) y queremos calcular cuánto más estaríamos ganando el próximo mes. Para eso debemos calcular el 15 % de 10220, es decir:

$$\frac{15}{100}\cdot 10220 = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{\mathbf{20}}}}{\cancel{100}}}\cdot \overset{511}{\cancel{\mathbf{10220}}} = 3\cdot 511 = 1533$$

Es decir que recibiremos un aumento de \$1533.

División La división (también llamada cociente) estará ahora bien definida en el conjunto de los racionales (siempre y cuando el divisor no sea 0) y será un nuevo número racional, cuyo numerador será el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor y su denominador será el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor (es decir que se debe hacer la multiplicación cruzada). Dicho de otra forma, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (con b, c y $d \neq 0$) entonces:

División de números racionales

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} : \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}}}$$

Ejemplo: $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5}{7\cdot 2} = \frac{15}{14}$ $\qquad -\frac{2}{15} : \frac{3}{8} = \frac{-2\cdot 8}{15\cdot 3} = -\frac{16}{45}$

Nótese en el último ejemplo que el signo negativo de la fracción afecta sólo al numerador (también podría afectar solo al denominador, pero no a ambos).

Debido a esta definición podemos establecer reglas para la simplificación de las fracciones antes de realizar la división (que como siempre, es recomendable). En este caso la simplificación podrá hacerse numerador con numerador o denominador con denominador (además de la usual simplificación dentro de una misma fracción).

Regla de simplificación para la división de fracciones

Ejemplo:

$$\frac{12}{25} : \frac{8}{15} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{\mathbf{25}}}} : \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{\mathbf{15}}}} = \frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 2} = \frac{9}{10}$$

*Muchos de ustedes tal vez estén acostumbrados a usar la regla de tres simple para calcular porcentajes (y es perfectamente válido siempre y cuando se use correctamente), pero esta forma de calcularlo es muy práctica, sobre todo para el planteo de ecuaciones, como veremos más adelante.

Notación: Para simbolizar la división usaremos los símbolos ":" , "÷" o una raya horizontal separando al dividendo (en la parte superior) del divisor (en la parte inferior). Por ejemplo, el último ejemplo podríamos haberlo expresado como:

$$\frac{12}{25} : \frac{8}{15} \qquad \text{o} \qquad \frac{12}{25} \div \frac{8}{15} \qquad \text{o} \qquad \frac{\frac{12}{25}}{\frac{8}{15}}\ {}^{*}$$

División como producto por el inverso del divisor

La existencia de inverso multiplicativo nos permite pensar a la división como un producto (el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor). En decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (con b, c y $d \neq 0$) entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}}$$

Ejemplo: $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14}$

Si se piensa a la división como un producto por el inverso del divisor se cumplen **todas las propiedades del producto** que vimos anteriormente para números racionales.

Potenciación En el conjunto de los números racionales podemos ahora extender nuestra definición de potenciación, no solo a bases racionales, si no también a exponentes enteros, ya que podremos definir a las potencias negativas gracias a la existencia del inverso multiplicativo. Es decir, que si $a \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces: **Potencias negativas**

$$\boxed{\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}}$$

Ejemplos: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 1 : \frac{1}{8} = 8 \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = 1 : \frac{4}{9} = \frac{9}{4}$$

Nótese que en los dos últimos ejemplos se ve que elevar una fracción a una potencia negativa equivale a invertir la fracción y elevarla a una potencia positiva (y en general será esta la forma recomendable de trabajar). Por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8 \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

*Nótese que esta última notación puede resultar confusa si el dividendo o el divisor es un número entero y por lo tanto no es muy recomendable (al menos en esos casos). Por ejemplo una expresión de este estilo $\frac{\frac{3}{4}}{5}$ puede resultar muy confusa.

Notación: Cuando trabajamos con potencias de base racional es importante el correcto uso de los paréntesis, ya que a veces la presencia (o ausencia) de los mismos puede simbolizar expresiones muy diferentes. Por ejemplo:

$$\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \text{no es lo mismo que} \quad \frac{\mathbf{2}^2}{3} = \frac{4}{3}$$

Propiedades de la potencia (en $\mathbb{Q}$):

Propiedades de la potencia

Si p y $q \in \mathbb{Q}$, n y $m \in \mathbb{Z}$, entonces:

- **Exponente 1:** $\boldsymbol{p^1 = p}$
- **Exponente 0:** $\boldsymbol{p^0 = 1}$ (para $p \neq 0$)

  Exponente 0
- **Producto de potencias de igual base:** $\boldsymbol{p^m \cdot p^n = p^{m+n}}$

  Producto de potencias
- **Cociente de potencias de igual base:** El cociente de potencias de igual base será una nueva potencia con la misma base, pero cuyo exponente será la resta de los exponentes. En otras palabras: si $p \neq 0$, entonces:

  Cociente de potencias de igual base

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}}}$$

Ejemplos: $\dfrac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$ $\qquad$ $\dfrac{2^3}{2^{-4}} = 2^{3-(-4)} = 2^{3+4} = 2^7$

- **Potencia de potencia:** $\boldsymbol{(p^m)^n = p^{m \cdot n}}$

  Potencia de potencia
- **Distributiva respecto al producto:** $\boldsymbol{(p \cdot q)^m = p^m \cdot q^m}$

  Distributiva res. al producto
- **Distributiva respecto al cociente:** La potencia de un cociente es el cociente de las potencias del numerador y del denominador. Dicho de otra forma, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ entonces:

  Distributiva respecto al cociente

$$\boxed{\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

- **Signo de la potencia:** Misma regla de signos que las potencias en $\mathbb{Z}$ (pág. 21)

  Signo de la potencia

1.4. Números Reales

De a poco fuimos completando nuestros conjuntos numéricos. Comenzamos con los naturales, luego incluimos sus opuestos (los negativos) para forma los enteros y luego partimos en varias partes a cada uno de estos para generar las fracciones y así tener a los números racionales. Sin embargo, a pesar de esto nuestra recta numérica no está completa. Todavía quedan algunos números que no podemos expresar como un cociente de enteros. A estos números, que en su representación decimal tienen infinitos decimales no periódicos, como $\sqrt{2} = 1,414...$, $\pi = 3,14159...$, etc., los llamaremos **números irracionales** (ya que no se pueden expresar como una razón o cociente entre dos números enteros) y los representaremos con la letra $\mathbb{I}$.

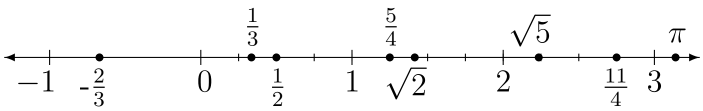
Números irracionales

Estos números irracionales junto a los números racionales formarán el conjunto de los **números reales**. Este será el conjunto con el que trabajaremos de aquí en más en esta guía y a lo largo de la materia de *Matemática* (aunque no es el conjunto numérico definitivo, existe por ejemplo el conjunto de los números complejos, que incluyen a los reales y a otros nuevos números (los imaginarios), pero no trabajaremos con ellos). Al conjunto de los reales lo representaremos con la letra $\mathbb{R}$ y en la notación de conjuntos lo podemos expresar como:

Números reales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

A este conjunto podremos ahora si representarlo como la recta numérica **completa**, donde cada punto de ésta corresponderá a un número racional o irracional y contarán con un orden (los números mayores siempre se encuentran hacia la derecha). A los números irracionales los ubicaremos sobre la recta de forma aproximada (aunque hay métodos geométricos para graficar algunos de ellos) y a los números racionales los ubicaremos como vimos anteriormente. Por ejemplo:



Radicación Introduciremos en los números reales una nueva operación que es la radicación. Es una operación que es inversa a la potenciación. Por ejemplo, para calcular $\sqrt[3]{8}$ (que se lee como "raíz cúbica de 8") deberemos pensar en un número que elevado a la 3 de como resultado 8 (en este caso será 2). Al número que estamos queriendo calcularle la raíz (en el ejemplo el 8) lo llamaremos **radicando** y al número que indica el "tipo" de raíz lo llamaremos **índice** de la raíz (en el ejemplo el 3).

Para definir a la radicación de forma general tendremos que tener ciertas precauciones, dependiendo del índice de la raíz (que será para nosotros siempre un número natural **no nulo**) y el signo del radicando (que será un número real). Debido a las reglas de los signos para las potencias (pág. 21), tendremos entonces dos definiciones ligeramente distintas dependiendo si el índice de la raíz es par o impar:

- **Raíces de índice par:** Si a es un número real **positivo** y n es un número natural **par** definiremos a la raíz n-ésima de a como el número real **positivo** que elevado a la n de como resultado a. En otras palabras si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ y n es **par** y $\boldsymbol{a > 0}$ entonces definimos:

Definición raíz de índice par

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a \quad (\text{con } b > 0)}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ ya que } 3^2 = 9 \qquad \sqrt[4]{16} = 2 \text{ ya que } 2^4 = 16$$

Nótese que en los ejemplos el resultado siempre fue **uno solo y positivo**, por más que $(-3)^2$ también es 9 y $(-2)^4$ también es 16. Esto es consecuencia de la definición, en la cual al momento de redactarla *decidimos* elegir el resultado positivo.*

Notación: Por convención en las raíces de índice 2 (llamadas raíces cuadradas) se omitirá de escribir el índice en la raíz, como vimos en el ejemplo anterior.

Aclaración: Las **raíces de índice par de números reales negativos no están definidas** en $\mathbb{R}$, ya que ningún número real elevado a una potencia par dará un como resultado un número negativo. Por lo tanto, expresiones como $\sqrt{-2}$ o $\sqrt[4]{-5}$ no estarán definidas para nosotros.

Definición raíz de índice impar

- **Raíces de índice impar:** Si a es un número real cualquiera y n es un número natural **impar** definiremos a la raíz n-ésima de a como el número real que elevado a la n de como resultado a. En otras palabras si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ y n es **impar** entonces definimos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \text{ ya que } 5^3 = 125 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2 \text{ ya que } (-2)^5 = -32$$

Nótese en estos ejemplos que las raíces de índice impar están bien definidas tanto para números positivos como negativos y el resultado conserva el signo del radicando (similar a lo que pasaba con las potencias de exponente impar).

Propiedades de las raíces

Propiedades de las raíces:

- **Distributiva respecto al producto:** La raíz de un producto es igual al producto de las raíces (siempre y cuando éstas se puedan calcular). En otras palabras, si a y $b \in \mathbb{R}$ (y no son negativos en caso de que el índice sea par) y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}}$$

Ejemplos: $\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Esta propiedad se suele usar para **extraer factores de las raíces** (como ocurrió en el último ejemplo). A veces será necesario operar de forma adecuada con el radicando para poder extraer estos factores. Por ejemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$$

*Distinta sería la situación si tuviéramos que encontrar los resultados de la ecuación $x^2 = 9$, pero eso lo veremos más adelante.

Distributiva respecto al cociente

- **Distributiva respecto al cociente:** La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces (siempre y cuando éstas se puedan calcular). De forma general diremos que si a y $b \in \mathbb{R}$ (y no son negativos en caso de que el índice sea par), $b \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \qquad \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Muchas veces en matemática, cuando tenemos una expresión como la del último ejemplo (con una raíz en el denominador), se realiza una operación llamada **racionalización** para obtener una fracción equivalente, pero con denominador entero. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aclaración: $\sqrt[n]{a+b}$ no es igual a $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ y del mismo modo **$\sqrt[n]{a-b}$ no es igual a $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$** *(es decir que las raíces no son distributivas respecto de la suma o la resta)*

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4+9} & & \sqrt{4}+\sqrt{9} \\ \sqrt{13} & & 2+3 \\ \sqrt{13} & \neq & 5 \end{array}$$

- **Raíces y potencias del mismo orden:** Si tenemos una raíz de una potencia de un mismo orden podemos, dependiendo de la paridad del índice de la raíz, "cancelarlas" de alguna forma. Si el índice es impar, podremos cancelarlas directamente (y quedará simplemente el radicando). En cambio si el índice es impar lo que obtendremos es el valor absoluto del radicando (ver página 18), ya que las raíces de índice par siempre dan como resultado un número positivo. Entonces, si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tendremos:

  - **Si n es par**: $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$
  - **Si n es impar**: $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{3^4} = |3| = 3 \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 \qquad \sqrt{(b^2)} = |b|$$

$$\sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \qquad \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$$

- **Raíces como potencias fraccionarias:** Toda raíz de índice natural se puede pensar como una potencia fraccionaria, dónde el índice de la raíz es el denominador del exponente. En otras palabras, si $a \in \mathbb{R}$ (y no es negativo si el índice es par) y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

Ejemplos: $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{-3} = (-3)^{\frac{1}{5}}$

- **Raíces y potencias:** La propiedad anterior, junto a la propiedad de las potencias de potencias nos permite escribir a cualquier combinación de raíces y potencias como una única potencia de exponente fraccionario, dónde el numerador es el exponente original y el denominador es el índice de la raíz. Dicho de otra forma, si $a \in \mathbb{R}$ (y no es negativo en caso de que el índice de la raíz sea par), $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{5^3} = \left(\sqrt{5}\right)^3 = 5^{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt[4]{2^3} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{4}} \qquad \sqrt[5]{2^{-2}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^{-2} = 2^{-\frac{2}{5}}$$

Además, el hecho de poder pensar a las raíces como potencias fraccionarias nos permite aplicar en la radicación todas las propiedades de la potenciación.

Estimación del valor de las raíces irracionales

Estimación del valor de las raíces

Algunas de las raíces que hemos calculado dan como resultado un número entero o racional, pero otras raíces, como la $\sqrt{2}$ sabemos que son irracionales. Veamos ahora un método para estimar el valor de las raíces de este tipo y al menos poder saber entre que dos números enteros se encuentran.

Una forma de hacer esto (sin la calculadora) es fijarse entre que números enteros que tengan raíz exacta se encuentra el radicando. Por ejemplo, supongamos que queremos saber entre que dos números enteros se encuentra $\sqrt{11}$. Para eso vemos que 11 está entre 9 y 16 (dos números cuyas raíces cuadradas son enteros consecutivos). Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 9 < 11 < 16 & \\ \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} & \quad \text{Aplicando la raíz cuadrada a cada uno} \\ 3 < \sqrt{11} < 4 & \quad \text{Calculando} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sqrt{11}$ estará entre 3 y 4 (y probablemente más cerca del 3, ya que 11 está más cerca de 9 que de 16).*

*Si quisiéramos seguir ajustando la aproximación, podríamos por ejemplo tomar el promedio de los dos valores ($3,5 = \frac{7}{2}$) y elevarlo al cuadrado y ver si 11 es mayor o menor que él (en este caso da $\frac{49}{4}$, que es más grande que 11 y por lo tanto $\sqrt{11}$ estará entre 3 y 3,5). Podríamos seguir repitiendo este método indefinidamente para lograr la precisión que deseemos (pero en nuestro caso generalmente nos alcanza con saber entre que dos números enteros se encuentra).

Potenciación Podemos ahora extender entonces las propiedades de la potencia a los casos donde la base sea real y el exponente racional.

Propiedades de la potencia (en $\mathbb{R}$): **Propiedades de la potencia**

Si a y $b \in \mathbb{R}$, $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (y a y b positivos cuando así se requiera), entonces:

- **Exponente 1:** $\boldsymbol{a^1 = a}$ **Exponente 1**
- **Exponente 0:** $\boldsymbol{a^0 = 1}$ (para $a \neq 0$) **Exponente 0**
- **Producto de potencias** **Producto de potencias de igual base:** $\boldsymbol{a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}$
- **Cociente de potencias de igual base:** $\boldsymbol{\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}}$ (si $a \neq 0$)
- **Potencia de potencia:** $\boldsymbol{(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}}$
- **Distributiva respecto al producto:** $\boldsymbol{(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}}$
- **Distributiva respecto al cociente:** $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}}$ (si $b \neq 0$)

Suma (y Resta) Si bien la suma y la resta están perfectamente bien definidas en $\mathbb{R}$, cuando tengamos que sumar (o restar) números reales a mano, sólo podremos sumar los términos racionales entre sí, y los términos que tengan mismos números irracionales (es decir términos similares).

Ejemplos:

$$2 + 3\sqrt{5} + 4\pi - 7\sqrt{5} + \frac{1}{3} = \overbrace{2 + \frac{1}{3}} + \overbrace{3\sqrt{5} - 7\sqrt{5}} + 4\pi = \frac{8}{3} - 4\sqrt{5} + 4\pi$$

$$\sqrt{20} + 3\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{4}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Propiedades de la suma:

Si a, b y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- **Cerrada:** $\boldsymbol{a + b \in \mathbb{R}}$
- **Conmutativa:** $\boldsymbol{a + b = b + a}$
- **Asociativa:** $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$
- **Elemento neutro (0):** $\boldsymbol{a + 0 = a}$
- **Opuesto:** $\boldsymbol{a + (-a) = 0}$

Producto (y División) El producto (y la división pensada como producto por el inverso del divisor) tienen todas las propiedades que tenían en $\mathbb{Z}$

Propiedades del producto

Propiedades del producto:

Si a, b y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

Cerrado

- **Cerrado:** $\boldsymbol{a \cdot b} \in \mathbb{R}$
- **Conmutativo:** $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$
- **Asociativo:** $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

Neutro (1)

- **Elemento neutro (1):** $\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$

Inverso tiplicativo

- **Inverso multiplicativo** $\boldsymbol{\left(\frac{1}{a}\right)}$**:** $\boldsymbol{a \cdot \frac{1}{a} = 1}$ (si $a \neq 0$)

Distributivo res. a la suma

- **Distributivo respecto a la suma:** $\boldsymbol{a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

Regla de los signos

- **Regla de los signos:** Misma que para los números enteros (pág. 20)

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Realizar las siguientes operaciones con números naturales, usando las propiedades siempre que sea posible.

   a) $(3+8)5 \cdot 2 + 9$ b) $2 \cdot 3 + 5(2+2)$ c) $2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1$

   d) $(3+2)^2 + 5\dot{3} + (2^2)^3$ e) $(3^4)^2 \cdot 3^3 \cdot (3 \cdot 2)^2$ f) $(2+3)^3 \cdot 5 \cdot 2^2$

2. Hallar la descomposición en factores primos y el MCM de los siguientes grupos de números naturales

   a) 8, 14 y 49 b) 30, 24 y 25 c) 120 y 80

3. Calcular usando las propiedades de los números enteros

   a) $-3(5-7) + 4(-3)$ b) $(2-5)(-8+3) - 3$ c) $3 \cdot (-2) - 4(3+2-8)$

   d) $(-2)^3 + 2 \cdot 5^2 - 3^2$ e) $(3-5)^4 + 3(3 \cdot 2)^2$ f) $(2 \cdot 3^3)^3 \cdot 2^4 \cdot 3$

4. Realizar las siguientes operaciones con números racionales

   a) $1 - (1 - (1 - (1+1)))$ b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{3}{8}$

   d) $\left(\dfrac{2}{3} - 2\right) + \left(3 - \dfrac{1}{3}\right) - \left(\dfrac{5}{3} - 4\right)$ e) $\left(\dfrac{8}{7} - \dfrac{3}{5}\right) \cdot \dfrac{4}{9}$ f) $\dfrac{\frac{8}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$

g) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{11}+3\right)-2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$

5. Calcular

a) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{6}{7}:\frac{6}{21}-1\right)\frac{1}{2}+\frac{3}{7}:\frac{2}{14}-30\cdot 10^{-1}$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right](2^{-2}+2^{-1})$ d) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right)\div\left(\frac{2}{5}-2\right)}$

6. Resolver y simplificar utilizando las propiedades de la potencia

a) $6^2\cdot 6^5$ b) $8^{-3}\cdot 8^4$ c) $b^3\cdot b^{-8}$ d) $(3x^5)(5x^{-3})$

e) $(2^{-1}x^4y^{-6})(8x^{-3}y^6)$ f) $\dfrac{7^4}{7^6}$ g) $\dfrac{4^5}{4^{-6}}$ h) $\dfrac{(a\,b)^4}{a^{-5}\,b^4}$

i) $\dfrac{12h^8}{-4h^{-4}}$ j) $\dfrac{7k^8z^{-4}}{-4(k^{-4})^3z^{-5}}$ k) $\dfrac{(2a^7v^8)(5^{-1}a^3v^{-3})}{(5a^5v^3)(2^{-1}a^8v^{-6})}$

7. Calcular y simplificar utilizando las propiedades de las raíces y de las potencias.

a) $-\sqrt{\dfrac{49}{36}}$ b) $\sqrt{\dfrac{81}{144}}$ c) $\sqrt{(-6b)^2}$ d) $-\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[7]{c^7}$

f) $-\sqrt[5]{-243}$ g) $-\sqrt[5]{243}$ h) $-\sqrt[4]{81}$ i) $\sqrt[3]{\dfrac{27y^5}{343x^3}}$ j) $\sqrt[4]{\dfrac{y^8}{16a^4y^4}}$

k) $\sqrt{\dfrac{4z^6w^{-3}}{9z^{-8}w^{-1}}}$ l) $\sqrt[3]{\dfrac{3a^6u^{-1}}{81a^3u^{-3}}}$ m) $\dfrac{2\cdot 2^{1/3}}{2^{1/6}}$ n) $\left[\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

8. Calcular

a) $\left(\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{9}}+\frac{1}{5}\right)\div\frac{16}{3}$ b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+2\sqrt{2}$

d) $\left[(5-2)\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-2\right]\frac{5}{4}\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{7}\left(\frac{4}{28}\right)^{-1}-1\right]$

2. Ecuaciones lineales

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de ecuaciones lineales y su aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

2.1. Definición

Una ecuación es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas. El origen de las ecuaciones debe verse en ciertos problemas surgidos tanto de una situación de interés real como planteados para entretenimiento; ambos casos poseen remotos antecedentes históricos. El afán por resolver estos problemas, ya por necesidad, ya como diversión, llevó paulatinamente a la idea fundamental: introducir cantidades desconocidas y someterlas a las leyes de la aritmética, considerando que son número a conocer. Ilustremos esta idea con un problema que data de principios del siglo $XVII$, y que dice así:

A un criado se le ha prometido la suma de 100 *pesos más una capa como sueldo anual. Al cabo de* 7 *meses el criado se va, y recibe como pago total la capa y* 20 *pesos. ¿Cual es el precio de la capa?.*

La cantidad desconocida es el valor de la capa; por comodidad designemos con c dicha cantidad; c es un número a conocer.

$\dfrac{c+100}{12}$ es el sueldo mensual prometido,

$\dfrac{7(c+100)}{12}$ es el sueldo por los 7 meses trabajados

$c+20$ es lo pagado por esos 7 meses.

Luego:

$$\frac{7(c+100)}{12}=c+20$$

El problema ha quedado reducido a encontrar un número c que verifique la igualdad anterior. Observemos que, para obtener la ecuación, hemos operado con c como si fuera un número (por ejemplo: le sumamos 100 al resultado lo dividimos por 12, etc.).

Vemos entonces que, originado en la solución de problemas como el anterior, aparece el interés por conocer métodos que permitan resolver las ecuaciones. Se sabe por ejemplo que la resolución de ecuaciones sencillas como la anterior, era conocida por culturas tan antiguas como la egipcia (aunque carecían del simbolismo adecuado que actualmente utilizamos). Este estudio, llevado a cabo durante siglos, es lo que se conoce con el nombre de Álgebra.

2.2. Resolución de ecuaciones

La **solución de una ecuación** es un número x_0 tal que al reemplazar la incógnita por x_0 en la ecuación se obtenga una identidad numérica.

El procedimiento básico para tratar una ecuación está basado en la idea mencionada anteriormente: la incógnita es un número -actualmente desconocido- que se quiere identificar.

Es posible entonces pensar que una ecuación es una igualdad entre números ; serán válidas, en consecuencia, las propiedades de dicha igualdad:

Sumando (o restando) a ambos miembros de una igualdad un mismo número se obtiene otra igualdad.

Multiplicando (o dividiendo) ambos miembros de una igualdad por un número (en el caso de dividir, no nulo) se obtiene otra igualdad.

Usaremos estas reglas para transformar una ecuación en otra que tenga las mismas soluciones, pero cuya resolución sea más sencilla. Veamos un ejemplo:

$3x + 1 = 2 - x$

Sumando x a ambos miembros obtenemos la ecuación : $4x + 1 = 2$ que tiene las mismas soluciones que la anterior.

Restando 1 de ambos miembros obtenemos: $4x = 1$ y, finalmente, dividiendo por 4 ambos miembros: $x = \frac{1}{4}$

Por lo tanto $\frac{1}{4}$ es la solución de la ecuación original.

Lo que hemos hecho es transformar sucesivamente la ecuación con el fin de *despejar* la incógnita.

Llamaremos **ecuaciones equivalentes** a aquellas que poseen las mismas soluciones. Por ejemplo, las sucesivas ecuaciones obtenidas en el ejemplo anterior son equivalentes.

Las reglas básicas que permiten transformar una ecuación en otra equivalente son las siguientes:

Reglas obten ecuaci equiva

Regla 1: **Sumando o restando a ambos miembros de una ecuación una misma cantidad**, se obtiene una ecuación equivalente.

Regla 2: **Multiplicando o dividiendo ambos miembros, de una ecuación por una misma cantidad no nula**, se obtiene una ecuación equivalente.

2.3. Ecuaciones de primer grado o lineales

Cierto tipo de ecuaciones se resuelven utilizando exclusivamente las dos reglas enunciadas más arriba; son las llamadas **ecuaciones lineales** y tienen la forma:

$$ax = b$$

o una equivalente a ella.

2.3.1. Soluciones de una ecuación lineal

Las ecuaciones lineales pueden tener **solución única**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

Una ecuación lineal puede tener una **solución única**, por ejemplo:
$-3x = 2(x-1)+4$
$-5x = 2$

$-\frac{2}{5}$ es **la solución de la ecuación**.

Una ecuación lineal puede tener **infinitas soluciones**, por ejemplo:
$3x - 10 = 2(3x-5) - 3x$
$3x - 10 = 6x - 10 - 3x$
$3x - 10 = 3x - 10$
$0 = 0$
Cualquier número reemplazado en la incógnita la convierte en una identidad numérica. Por lo tanto **la ecuación tiene infinitas soluciones** (que en este caso son todos los números reales).

Una ecuación lineal puede **no tener solución**, por ejemplo:
$-3x - 8 = 2(x-1) - 5x$
$-3x - 8 = 2x - 2 - 5x$
$-3x - 8 = -3x - 2$
$0 = 6$ contradicción
No existe ningún número que reemplazado en la ecuación la convierta en una identidad numérica. Luego, **la ecuación no tiene solución**.

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Resolver las siguientes ecuaciones (si tienen solución) y, en el caso que existan, verificar las soluciones obtenidas

   a) $10 - 2x = x - 1$ b) $8x+x-1 = -2x+1$ c) $\frac{x}{2} - x = -3x + 1$

   d) $3(x+5) = -\frac{3}{4}(-4x+7)$ e) $(2-x)(3-x) = (1-x)(5-x)$

   f) $x+2 = -(3-x)+5$ g) $2(x-2) - (3x+1) - \frac{2(x+1)}{4} = 3(2-x)$

2. Resolver los siguientes problemas

   a) Se sabe que la ecuación : $(2a-1)(x+1)+x = a$, tiene por solución $x = -2$. ¿Cuál es el valor de a?

b) ¿Cuál es el número cuya tercera parte sumada a su quinta parte es igual a 40?

c) ¿A qué número hay que sumarle 5/2 para que la suma sea igual a su tercera parte?

d) Un padre tiene 30 años y su hijo 2. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el padre tenga 8 veces la edad de su hijo?

e) Una persona recibe un aumento de 10 % en su salario, alcanzando un ingreso de \$ 13200 mensuales. ¿Cuál era su salario antes del aumento?

f) En una oferta, un local de venta de artículos deportivos redujo el precio de unas zapatillas en un 20 % hasta alcanzar un precio de \$ 1120. ¿Cuál era el precio original?

3. Ecuaciones de segundo grado

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas. Aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

3.1. Definición

Se llaman **ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas** a las ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ o cualquier otra ecuación equivalente a ella.

A los números a, b y c los llamaremos **coeficientes** y serán respectivamente el coeficiente del término cuadrático, el coeficiente del término lineal y el coeficiente independiente (o término independiente) y en nuestro caso serán siempre números reales. Nótese que esta denominación hará referencia a los coeficientes de los términos cuando la ecuación esté escrita en la forma indicada más arriba (es decir con todos los términos agrupados de un mismo lado de la igualdad).

3.2. Métodos de resolución

Comencemos viendo como se resuelven ciertas ecuaciones de segundo grado sencillas (cuando no tienen término lineal o término independiente), para luego analizar algunos métodos de resolución generales para cualquier ecuación cuadrática.

Todas estas ecuaciones pueden tener (en el conjunto de los números reales) **dos soluciones, una solución o ninguna**, dependiendo de como sea la ecuación. También veremos entonces alguna forma de identificar de antemano cuántas soluciones reales tendrá una ecuación cuadrática.

3.2.1. Ecuaciones cuadráticas sin término lineal

Si la ecuación cuadrática no tiene término lineal (es decir que se puede escribir de la forma $ax^2 + c = 0$) la ecuación se puede resolver por simple despeje, prestando mucha atención a las propiedades de la potencia.

Ejemplo:

$$\begin{array}{cl}
3x^2 - 12 = 0 & \\
x^2 = 4 & \text{Despejando } x^2 \\
\sqrt{x^2} = \sqrt{4} & \text{Aplicando la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad} \\
|x| = 2 & \text{Utilizando la propiedad de las raíces y potencias de índice par} \\
\boxed{x_1 = 2\ ;\ x_2 = -2} & \text{Por definición del valor absoluto}
\end{array}$$

En este ejemplo la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, y como en cualquier ecuación podemos comprobar que realmente sean las soluciones correctas. En efecto:

Con $x_1 = 2$: $3(2)^2 - 12 = 3 \cdot 4 - 12 = 12 - 12 = 0$

Con $x_2 = -2$: $3(-2)^2 - 12 = 3 \cdot 4 - 12 = 12 - 12 = 0$

Notación: Muchas veces en despejes similares al anterior se suelen omitir los últimos dos pasos de la resolución y luego de $x^2 = 4$ se suele escribir directamente $x = \pm\sqrt{4}$ y luego $x = \pm 2$ como las soluciones de la ecuación cuadrática. Esto es una forma más resumida de escribir lo anterior, pero es de suma importancia saber por qué escribimos ese $\pm$ cuando hacemos ese tipo de despejes.

3.2.2. Ecuaciónes cuadráticas sin término independiente

Si la ecuación cuadrática no tiene término independiente (es decir que se puede escribir de la forma $ax^2 + bx = 0$) la ecuación se puede resolver reescribiéndola como $x(ax + b) = 0^*$ y luego utilizar una propiedad del producto de números reales que dice que **si un producto de dos (o más) factores da cero, entonces alguno de ellos debe valer cero**. De esta forma se resolverán dos ecuaciones más sencillas y se encontrarán las soluciones de la ecuación original.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{cl}
x^2 = -4x & \\
 & \text{Agrupando los términos a un mismo lado de la igualdad} \\
x^2 + 4x = 0 & \\
 & \text{Sacando factor común } x \\
x(x+4) = 0 & \\
 & \text{Utilizando la propiedad del producto de factores que da 0} \\
x = 0 \ \text{ ó } \ x + 4 = 0 & \\
 & \text{Resolviendo ambas ecuaciones} \\
\boxed{x_1 = 0 \ ; \ x_2 = -4} &
\end{array}
$$

Aclaración: Se debe tener cuidado al resolver este tipo de ecuaciones de no perder soluciones durante el despeje. Por ejemplo uno podría haber comenzado a resolver de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{cl}
x^2 = -4x & \\
 & \text{dividiendo ambos miembros por } x \\
x = -4 &
\end{array}
$$

Lo cual está **mal**, ya que nos hace perder una de las soluciones ($x = 0$). El paso de dividir ambos miembros de la igualdad por un número para obtener una ecuación equivalente es válido siempre y cuando **el número por el que estamos dividiendo sea distinto de cero** (y en este caso como dividimos por una incógnita no sabemos si es así). Por lo tanto podría haberse resuelto la ecuación de la última forma, pero aclarando que ese paso es válido **si $\boldsymbol{x \neq 0}$** y luego analizar que pasaría para $x = 0$. Por lo tanto suele ser más recomendable trabajar como vimos al principio.

3.2.3. Método de completación de cuadrados

La idea fundamental de este método consiste en ver que la ecuación cuadrática se puede reescribir usando el desarrollo del cuadrado de un binomio (ver página 16) y poder así obtener una ecuación que se pueda despejar por métodos similares a los del caso 3.2.1.

---

*Notar que si se usa la propiedad distributiva en esta nueva expresión se obtiene la expresión original. A esta técnica para reescribir la ecuación se la llama sacar factor común y la veremos con más detalle cuando analicemos factorización de polinomios y expresiones algebraicas.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $\quad x^2 - 6x + 5 = 0$

Los términos $x^2 - 6x$ pueden considerarse como parte del desarrollo del cuadrado del binomio: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Pero como en nuestra ecuación no tenemos el término $+9$ vamos a agregarlo para así **completar el cuadrado**. También tendremos que agregar un término -9 también, para que la ecuación siga siendo equivalente a la original.

El número que hay que sumar (y restar) se puede calcular (siempre y cuando el coeficiente del término cuadrático sea 1) como **la mitad del coeficiente del término lineal, elevado al cuadrado**. Esto se debe a que en el desarrollo de $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ el coeficiente del término lineal es $2k$ y lo que debemos agregar para completar el cuadrado es el término k^2.

Sigamos entonces con el ejemplo:

$$
\begin{array}{cl}
x^2 - 6x + 5 = 0 & \\
 & \text{Completando cuadrados (sumando y restando 9)} \\
\boldsymbol{x^2 - 6x + 9} - 9 + 5 = 0 & \\
 & \text{Reemplazando los tres primeros términos por } (x-3)^2 \\
\boldsymbol{(x-3)^2} - 9 + 5 = 0 & \\
 & \text{Operando} \\
(x-3)^2 - 4 = 0 & \\
 & \text{Despejando} \\
(x-3)^2 = 4 & \\
 & \text{Despejando como en el caso 3.2.1} \\
x - 3 = \pm\sqrt{4} & \\
 & \text{Despejando} \\
x = 3 \pm 2 & \\
\boxed{x_1 = 5 \ ; \ x_2 = 1} &
\end{array}
$$

3.2.4. Forma general (fórmula de Bhaskara)

El método es general, si consideramos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

Sacamos a como factor común: $\quad a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = 0$

Sumamos y restamos dentro del paréntesis la cantidad positiva: $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c = 0$$

Agrupamos convenientemente:

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Operando:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Pasamos a dividiendo (pues $a \neq 0$)

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

(llamada fórmula de Bhaskara)

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es un número real positivo, para que existan soluciones reales en una ecuación cuadrática tiene que cumplirse que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ejemplos:

1) Decir si existen soluciones para las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

Como $a = 6$; $b = -5$ y $c = 1$ en esta ecuación $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1 > 0$ y por lo tanto la ecuación tendrá <u>dos soluciones</u>, las cuales son:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 6} = \frac{5+1}{12} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad ; \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 6} = \frac{5-1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Como $a = 4$; $b = 4$ y $c = 5$ en esta ecuación $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -64 < 0$ entonces la ecuación <u>no tiene solución</u> en los números reales.

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Como $a = 4$; $b = -4$ y $c = 1$ en esta ecuación $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$. La ecuación tiene <u>una sola solución</u> en los números reales, la cual es:

$$x_1 = x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) ¿Cuál es el número natural que sumado al cuadrado de su consecutivo da 109?

Si Si n es un número natural; su consecutivo es $n + 1$, entonces:

$n + (n + 1)^2 = 109$

$n + n^2 + 2n + 1 = 109$

$n^2 + 3n - 108 = 0$

Cuyas soluciones son: $n_1 = 9$ y $n_2 = -12$ pero como n debe ser número natural, la solución del problema es $\boxed{n = 9}$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Utilizando el método de completación de cuadrados, resolver las ecuaciones

   a) $x^2 + 4x + 2 = 0$ b) $x^2 - 16x + 39 = 0$ c) $x^2 - 10x + 5 = 20$

2. Resolver las siguientes ecuaciones

   a) $x^2 - 3x - 70 = 0$ b) $3x^2 + 6x - 36 = 0$ c) $-2x^2 - 2x - 10 = 0$

   d) $5(1 - x^2) = -10(x + 1)$ e) $(2x + 3)(2x - 3) = 9(x - 1)$

   f) $2(1 - x) + (x - 1)^2 = 2 - x$ g) $3x^2 + 3 - 5x = x + 2x^2 - 6$

3. Resolver los siguientes problemas

   a) Hallar el/los números tales que su cuadrado sea igual a su opuesto.

   b) ¿Cuál es el número natural tal que la mitad del producto por su consecutivo es igual a 15?

   c) La cuarta parte de un número, multiplicada por ese número aumentado en dos unidades, es igual a seis veces y media dicho número. ¿Cuál es el/los números que cumplen esa condición?

   d) La superficie de un rectángulo es de 108 cm^2. Sabiendo que uno de los lados es igual a los 4/3 del otro, calcular las dimensiones del rectángulo.

   e) La superficie de un triángulo es de 60 cm^2. ¿Cuánto mide la altura, sabiendo que tiene 2 cm más que la base?

   f) Calcular el/los números que sumados a su cuadrado dan como resultado treinta.

   g) Encontrar tres números naturales consecutivos cuyos cuadrados sumen 77.

4. Polinomios

Objetivos: Efectuar correctamente operaciones con polinomios.

4.1. Definición

Se llaman polinomios a las expresiones de la forma:
$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ donde los $a_0,\ a_1, ..., a_n$ son elementos, por ejemplo, del conjunto de los números reales, llamados **coeficientes**, x es una indeterminada, y los exponentes de la indeterminada x son todos enteros no negativos.

Si $a_n \neq 0$ diremos que el **grado** de $P(x)$ es n (es decir la mayor potencia a la que aparece elevada la indeterminada x). A este coeficiente a_n lo llamaremos **coeficiente principal** (es decir el coeficiente del término de mayor grado) y lo denotaremos generalmente como C_p.

Grado coefici princi

Llamaremos **término independiente** al término de grado 0 (es decir el término donde no aparece la indeterminada x).

Térmi indepe

Aclaración: Es importante para estas definiciones que los polinomios sean escritos de forma que haya **a lo sumo un término de cada grado**.

Llamaremos **polinomio nulo** al polinomio: $0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$. El polinomio nulo no tiene grado.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no nulos, diremos que son iguales si y solo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

El polinomio **opuesto** de $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ es
$-P(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 + ... - a_n x^n$

4.2. Operaciones con polinomios

4.2.1. Suma

La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene agrupando los términos del mismo grado y sumando sus coeficientes.

Ejemplo:
Si $P(x) = 1 + x - 5x^2 + 7x^5$ y $Q(x) = 2 - x - 12x^2 + 3x^3 - x^4$ entonces:

$$P(x) + Q(x) = 3 - 17x^2 + 3x^3 - x^4 + 7x^5$$

La **diferencia** entre $P(x)$ y $Q(x)$ es equivalente a sumar a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$. Es decir: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$.

4.2.2. Producto

La multiplicación de polinomios se define de modo tal que satisfaga la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base, para la indeterminada x, la conmutatividad de x con los números reales y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Ejemplo:
Si $P(x) = 1 + x - 5x^2 + 7x^5$ y $Q(x) = 2 - x - 12x^2$ entonces:

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (1 + x - 5x^2 + 7x^5) \cdot (2 - x - 12x^2) = \\
&= (2 - x - 12x^2) + x(2 - x - 12x^2) - 5x^2(2 - x - 12x^2) + 7x^5(2 - x - 12x^2) \\
&= 2 - x - 12x^2 + 2x - x^2 - 12x^3 - 10x^2 + 5x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7 \\
&= 2 - x + 2x - 12x^2 - x^2 - 10x^2 - 12x^3 + 5x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7 \\
&= 2 + x - 23x^2 - 7x^3 + 60x^4 + 14x^5 - 7x^6 - 84x^7
\end{aligned}$$

4.2.3. División

Dados dos polinomios $P(x)$ (**dividendo**) y $D(x)$(**divisor**) con $D(x) \neq 0(x)$, es posible determinar $C(x)$ y $R(x)$ tal que:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)\ ^*$$

siendo el grado de $R(x)$ menor que el grado de $D(x)$ o bien $R(x) = 0$. $C(x)$ se llama **polinomio cociente** y $R(x)$ **resto**.

Si $R(x) = 0$, entonces $P(x) = D(x) \cdot C(x)$ y se dice que $P(x)$ es **divisible** por $D(x)$.Este concepto es análogo al visto en números naturales y enteros.

Ejemplo:
$P(x) = 2x^3 - x + 1$ y $D(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-\ \ 2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x + 2 \\ \cline{1-1}
2x^2 - 3x + 1 & \\
-\ \ 2x^2 - 2x + 2 & \\ \cline{1-1}
-x - 1 &
\end{array}$$

En este caso el dividendo es $P(x) = 2x^3 - x + 1$; el divisor es $D(x) = x^2 - x + 1$; el cociente es $C(x) = 2x + 2$ y el resto es $R(x) = -x - 1$

Por lo tanto:

$$\underbrace{2x^3 - x + 1}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{divisor}}\underbrace{(2x + 2)}_{\text{cociente}} + \underbrace{(-x - 1)}_{\text{resto}}$$

*Nótese la similitud entre esto y el algoritmo de la división de naturales y enteros.

4.2.4. Regla de Ruffini

Es un procedimiento que permite hallar el cociente y el resto en **el caso en que el divisor sea un polinomio de la forma $x - a$** .

Sean $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ y $D(x) = x + 2$

Regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r r|r r r r}
\text{Coeficientes del dividendo} \rightarrow & & \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\
\text{Opuesto del término independiente del divisor} \rightarrow & \mathbf{-2} & & -4 & 16 & -32 \\
\cline{2-6}
 & & 2 & -8 & 16 & \boxed{-27}
\end{array}
$$

Se baja el primer coeficiente. Los restantes se obtienen multiplicando el anterior por el número que se escribe en el ángulo izquierdo y se coloca a continuación en la segunda fila, luego se suman primera y segunda fila. El número recuadrado es el **resto**. Los demás números son los coeficientes del **cociente**, el cual será un polinomio de un grado menos que el dividendo. Por lo tanto el cociente es $2x^2 - 8x + 16$.

Por lo tanto: $2x^3 - 4x^2 + 5 = (x + 2)(2x^2 - 8x + 16) - 27$

4.2.5. Valor numérico

Si a es un número real cualquiera, se llama **valor numérico** $P(a)$ de un polinomio $P(x)$ al número que se obtiene sustituyendo el valor a en lugar de x y efectuando los cálculos.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^2 - 3x + 6$ $\qquad P(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 6 = 20$

4.2.6. Raíz o cero de un polinomio

El número a se llama **raíz o cero** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. **Raíz o polino**

Ejemplo:
Los números 0; -1; 1 son raíces de $P(x) = x^3 - x$ puesto que:
$P(0) = 0^3 - 0 = 0 \qquad P(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0 \qquad P(1) = 1^3 - 1 = 0$

4.2.7. Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$, por otro de la forma $x - a$ es igual a $P(a)$.

Ejemplo:
El resto de dividir $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ por $x + 2$ es
$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 1 = -13$

Observación: Si a es raíz de $P(x)$, por el teorema del resto sabemos que el resto de dividir a $P(x)$ por $(x-a)$ será 0 ya que $P(a)=0$ y por lo tanto $P(x)=(x-a)\cdot C(x)$ Entonces se dice que $P(x)$ **es divisible por** $x-a$ o que $P(x)$ **es múltiplo de** $x-a$.

Ejemplo:
$P(x)=x^3+4x+16$ con $a=-2$
$P(-2)=(-2)^3+4(-2)+16=0$
Como -2 es raíz de $P(x)$ dividiendo $P(x)$ por $x+2$ usando la Regla de Ruffini

	1	**0**	**4**	**16**
-2		-2	4	-16
	1	-2	8	$\boxed{0}$

Entonces $x^3+4x+16=(x+2)(x^2-2x+8)$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

Dados los siguientes polinomios:

$P_1=x-3$ $\quad P_2=x+4$ $\quad P_3=x^2+2x$ $\quad P_4=-3x^2+2$
$P_5=x^3+2$ $\quad P_6=x^4-4$ $\quad P_7=x^3+2x^2$
$P_8=3x^4+2x^3-5x-1$ $\quad P_9=x^5-7x^3+5x-6$

1. Resolver las siguientes operaciones de polinomios

   a) P_3+P_4 b) P_8+P_9 c) P_9-P_8 d) P_7-P_4
   e) $P_1\cdot P_2$ f) $P_7\cdot P_3$ g) $P_5\cdot P_6$ h) $P_3\cdot P_8$

2. Encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones. En caso de ser posible utilizar la regla de Ruffini

   a) P_8/P_7 b) P_9/P_2 c) P_8/P_6 d) P_6/P_3
   e) P_9/P_1 f) P_9/P_5 g) P_6/P_1 h) P_4/P_2

3. Calcular los siguientes valores numéricos

   a) $P_2(-1)$ b) $P_4(2)$ c) $P_3(-2)$ d) $P_8(-1)$ e) $P_6(3)$

4. Calcular, usando el teorema del resto, el resto de las divisiones del ejercicio 2) en los casos que sea posible.

5. Calcular las raíces reales de los siguientes polinomios

   a) $x-8$ b) $x+15$ c) $2x^2-x-1$ d) x^2-4 e) x^2+4 f) x^3+8

5. Factorización de expresiones algebraicas

Objetivos: Factorizar correctamente expresiones algebraicas.

5.1. Definición

Llamaremos **expresiones algebraicas** a expresiones compuestas por números y letras relacionadas entre si por las operaciones básicas.

Ejemplo:
$bt^6 - b^4t^3 + 5b + 2bt - 2$ es una expresión algebraica.

5.2. Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla como producto de expresiones algebraicas **mas sencillas**.
Por ejemplo: la expresión $2x^2 + 4ax$ se puede escribir como $2x(x + 2a)$.

5.2.1. Factor Común

En este caso se separa en términos y se extraen los factores comunes que están en todos los términos.
Ejemplos:

$7x^3 - 49x^2 = \boxed{7x^2(x - 7)}$

$b^3a^2 - 2b^2a^3 + a^4b^4 = \boxed{b^2a^2(b - 2a + a^2b^2)}$

5.2.2. Trinomio Cuadrado Perfecto

Puesto que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, podemos usar esta igualdad para factorizar algunos trinomios de segundo grado.
Ejemplo:

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = \boxed{(x + 5)^2} = (x + 5)(x + 5)$

5.2.3. Cuatrinomio Cubo Perfecto

Puesto que $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, podemos usar esta igualdad para factorizar algunos cuatrinomios de tercer grado:
Ejemplo:

$t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = t^3 + 3 \cdot 2 \cdot t^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot t + 2^3 = \boxed{(t + 2)^3} = (t + 2)(t + 2)(t + 2)$

5.2.4. Diferencia de cuadrados

Puesto que $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$
Ejemplos:

$b^2 - 9 = \boxed{(b + 3) \cdot (b - 3)}$

$x^4 - 16a^4 = (x^2 - 4a^2)(x^2 + 4a^2) = \boxed{(x - 2a)(x + 2a)(x^2 + 4a^2)}$

5.2.5. Factorizar polinomios conociendo una raíz

Como vimos en la sección 4.2.7 (pág. 48), si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ y por lo tanto $P(x) = (x-a)\cdot C(x)$, dónde $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ por $(x-a)$.
Ejemplo:
Como -3 es raíz de $x^3 - 8x + 3$ (ya que $(-3)^3 - 8(-3) + 3 = 0$), entonces basta con hallar el cociente de la división:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\
\mathbf{-3} & & 3 & 9 & -3 \\
\hline
 & 1 & -3 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Por lo tanto $x^3 - 8x + 3 = \boxed{(x+3)(x^2-3x+1)}$

Observación: Si conocemos una raíz de un polinomio siempre vamos a poder factorizarlo encontrando el cociente mediante la regla de Ruffini, ya que el divisor siempre será de la forma $x - a$.

5.2.6. Factorizar polinomios con la fórmula de Bhaskara

Si $P(x)$ es un **polinomio de grado 2** y a_1 y a_2 son sus raíces (las cuales se pueden encontrar resolviendo la ecuación de segundo grado $P(x) = 0$ mediante la fórmula de Bhaskara), entonces $P(x) = C_p(x-a_1)(x-a_2)$, donde C_p es el coeficiente principal de $P(x)$.
Ejemplo:
Sea $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$. Buscamos sus raíces resolviendo la ecuación $2x^2 - 2x - 12 = 0$ mediante la fórmula de Bhaskara:

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 2\cdot(-12)}}{2\cdot 2} = \frac{2\pm 10}{4} \Rightarrow a_1 = 3 \ ; \ a_2 = -2$$

Por lo tanto $2x^2 - 2x - 12 = \boxed{2(x-3)(x+2)}$

5.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Llamaremos **fracción algebraica** a todo cociente del tipo $\frac{P}{Q}$ dónde P y Q son alguna expresión algebrica como las definidas anteriormente (ver página 50).

Para operar con este tipo de expresiones usaremos los mismos principios que para las operaciones con números racionales, con alguna salvedad especial a la hora de simplificar estas expresiones.

Además en muchos pasos trataremos de factorizar las expresiones algebraicas lo más posible, es decir escribirlas como producto de **factores irreducibles** (es decir aquellos que ya no puedan escribirse como producto de factores más sencillos). En el caso de los polinomios, los factores irreducibles serán solamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 que no tengan raíces reales (ambos de coeficiente principal 1).

Simplificación de fracciones algebraicas:

Simpl
de fra
algebr

Para simplificar una fracción algebraica deberemos factorizar el numerador y el denominador lo más posible. Luego podremos cancelar **factores** iguales que se encuentren tanto en el numerador como en el denominador, pero aclarando que esa simplificación es posible **en caso que dicho factor sea distinto de 0**.

Ejemplo:

$$\frac{\overbrace{x^3+4x^2+4x}^{\text{Factor común}}}{\underbrace{x^2-4}_{\text{Dif. de cuadrados}}} = \frac{x\,\overbrace{(x^2+4x+4)}^{\text{TCP}}}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)^{\cancel{2}}}{(x-2)\underbrace{\cancel{(x+2)}}_{\text{si } x+2\neq 0}} = \frac{x(x+2)}{x-2} \qquad \text{si } x \neq -2$$

En este caso la cancelación es válida sólo si $x+2 \neq 0$ (es decir si $x \neq -2$), ya que si no la última expresión no es equivalente a las anteriores (porque esa expresión si está definida para $x=-2$ mientras que las otras no, porque no se puede dividir por 0) y es por eso que se debe añadir la condición $x \neq -2$.

Aclaración: Cabe destacar que sólo se pueden cancelar de esta forma **factores**. Es decir, sólo podremos simplificar cosas que estén multiplicando al numerador y al denominador. **De ninguna manera podremos cancelar términos** (algo que esté sumando o restando) del numerador y denominador. Por ejemplo:

$$\frac{x^2+2x+\cancel{1}}{x+\cancel{1}} \qquad \leftarrow \textbf{Está mal simplificado!}$$

Suma (y Resta) La suma (y resta) de fracciones algebraicas las realizaremos con el mismo principio que la suma de números racionales explicada anteriormente (ver página 23). Al igual que en ese caso, las fracciones son fáciles de sumar y restar si tienen igual denominador. Si no tendremos que encontrar fracciones equivalentes con denominador común (multiplicando el numerador y el denominador por las mismas expresiones algebraicas) para luego sumarlas (o restarlas) directamente.

Veamos ahora en detalle los pasos que se deben seguir, mediante un ejemplo concreto. No trataremos de definir de forma general la suma como hicimos con los números racionales porque es básicamente la misma idea:

- Cálculo del denominador común que deberán tener las fracciones.
- Cálculo de las fracciones equivalentes con dicho denominador.
- Cálculo de la suma (o resta).

Cálculo del denominador común (MCM)

Para calcular cual será el denominador común que tendremos que usar en los cálculos primero deberemos factorizar todas las expresiones algebraicas que se encuentran en los denominadores (sería el análogo a encontrar la descomposición en factores primos). Luego tomaremos cada factor que aparezca en alguna expresión, elevado al máximo exponente que aparece (exactamente igual que hacíamos con el cálculo del MCM).

Ejemplo:

Supongamos que queremos calcular: $\dfrac{3x}{8x^2-8} - \dfrac{x^2}{4x^2+8x+4}$
En ese caso primero factorizamos los denominadores:

$$\overbrace{8x^2-8}^{\text{Factor común}} = 8\overbrace{(x^2-1)}^{\text{Dif. de cuad.}} = 8(x+1)(x-1) = 2^3(x+1)(x-1) \quad \leftarrow 3 \text{ factores distintos}$$

$$\overbrace{4x^2+8x+4}^{\text{Factor común}} = 4\overbrace{(x^2+2x+1)}^{\text{TCP}} = 4(x+1)^2 = 2^2(x+1)^2 \quad \leftarrow 2 \text{ factores distintos}$$

Ahora que tenemos a la vista todos los factores, tomamos cada uno de los que aparece en alguna de estas expresiones, elevado al máximo exponente que aparece. Por lo tanto el denominador común que tenemos que utilizar será: $\boxed{2^3(x+1)^2(x-1)}$ (Nótese que no hay que olvidarse de los factores que son simplemente números).

Cálculo de las fracciones equivalentes

Una vez que calculamos el denominador común, procedemos a calcular las fracciones equivalentes de forma similar a lo que hacíamos con los números racionales: nos fijamos que factores le faltan a los respectivos denominadores y multiplicamos el numerador y denominador de esa fracción por estos factores.

Siguiendo con el ejemplo:

El denominador de la primer fracción es $2^3(x+1)(x-1)$, es decir que le falta un factor $(x+1)$ para ser igual al denominador que queremos. Por lo tanto:

$$\frac{3x}{8x^2-8} = \frac{3x}{2^3(x+1)(x-1)} = \frac{3x\boldsymbol{(x+1)}}{2^3(x+1)(x-1)\boldsymbol{(x+1)}} = \boxed{\frac{3x(x+1)}{2^3(x+1)^2(x-1)}}$$

El denominador de la segunda fracción es $2^2(x+1)^2$, por lo cual faltaría un factor 2 y un factor $(x-1)$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2}{4x^2+8x+4} = \frac{x^2}{2^2(x+1)^2} = \frac{x^2\boldsymbol{2(x-1)}}{2^2(x+1)^2\boldsymbol{2(x-1)}} = \boxed{\frac{2x^2(x-1)}{2^3(x+1)^2(x-1)}}$$

Resta de las fracciones equivalentes

Habiendo obtenido las fracciones equivalentes con un denominador común, ahora simplemente procedemos a restarlas, operando con las expresiones algebraicas del numerador, teniendo especial cuidado con los signos.

Siguiendo con el ejemplo:

$$\frac{3x(x+1)}{2^3(x+1)^2(x-1)} - \frac{2x^2(x-1)}{2^3(x+1)^2(x-1)} = \frac{\overbrace{3x(x+1)}^{\text{Distrib.}} - \overbrace{2x^2(x-1)}^{\text{Distrib.}}}{2^3(x+1)^2(x-1)} =$$

$$= \frac{3x^2+3x-\overbrace{(2x^3-2x)}^{\text{Dist. el } -}}{2^3(x+1)^2(x-1)} = \frac{3x^2+3x-2x^3+2x}{2^3(x+1)^2(x-1)} = \boxed{\frac{-2x^3+3x^2+5x}{2^3(x+1)^2(x-1)}}$$

Producto y División El producto y división de fracciones algebraicas seguirá las mismas reglas que el producto y división de números racionales. Siempre primero factorizaremos todas las expresiones algebraicas y trataremos de simplificar *antes* de comenzar a operar. Solamente habrá que tener en cuenta que a la hora de simplificar (siguiendo las mismas reglas que para los números racionales que están en las páginas 25 y 27) habrá que aclarar que esa simplificación es válida si el factor en cuestión es distinto de 0.

Ejemplo:

$$\frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{\text{TCP}}}{5\underbrace{(x^2-1)}_{\text{Dif. cuad.}}} \cdot \frac{\overbrace{2x^2-2x}^{\text{Factor común}}}{6x^3} = \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{5\underbrace{\cancel{(x+1)}}_{\text{si } x\neq -1}\underbrace{\cancel{(x-1)}}_{\text{si } x\neq 1}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\underset{3}{\cancel{6}}\underbrace{\cancel{x^3}^{\,2}}_{\text{si } x\neq 0}} = \frac{x+1}{5}\cdot\frac{1}{3x^2} = \boxed{\frac{x+1}{15x^2}}$$

Si $x \neq -1$, 1 y 0

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Extraer los factores comunes en las siguientes expresiones algebraicas

   a) $2x^2 + 4xy - 6x^3$
   b) $6x^2y - 9x^2y^2 + 12xy$
   c) $12u^5a^2 + 18u^2a^3 - 24u^3a^4$
   d) $2t^2 + 100t^3$
   e) $x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 - xy^4z^3 + z^4y^3$

2. Considerar distintos grupos dentro de una expresión algebraica dada, extraer los factores comunes en cada uno de ellos. Repetir la extracción de factores comunes, si es posible

   a) $x^2 + 4x + xy + 4y$
   b) $xy^2 - 2xy + yz - 2z$
   c) $x^4 - x^3 + x^2 + x^2y - xy + y$
   d) $2xy - yz + 2xu - uz$
   e) $x^3y - x^2y - y - x^3 + x^2 + 1$

3. Decidir cuales de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, de ser así factorizarlos

   a) $x^2 + 2xy + y^2$ b) $x^2 + 2x + b^2$ c) $a^2 + 8a + 16$
   d) $z^2 + zy + y$ e) $36 + 12y + y^2$ f) $x^2 - 2xy + y^2$
   g) $a^2 - 2b + b^2$ h) $d^2 - 8d + 16$ i) $z^2 - 2zy + y^2$
   j) $36 - 12t + t^2$

4. Factorizar los siguientes cuatrinomios cubos perfectos

   a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ b) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ c) $x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$
   d) $x^6 + \frac{1}{27} + x^4 + \frac{1}{3}x^2$

5. Factorizar utilizando diferencia de cuadrados

   a) $x^2 - 100$ b) $x^2 - \frac{1}{36}$ c) $4x^2 - 25$ d) $t^4 - 4$ e) $h^8 - 64$

6. Factorizar teniendo en cuenta que a es raíz de los polinomios

   a) $x^3 + 27 \quad a = -3$ b) $x^5 - 32 \quad a = 2$ c) $z^7 + 1 \quad a = -1$
   d) $27x^3 - 1 \quad a = 1/3$ e) $z^2 - 25 \quad a = 5$ f) $t^2 + t - 6 \quad a = -3$
   g) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad a = -1$

7. Factorizar los siguientes polinomios utilizando la fórmula de Bhaskara

   a) $x^2 - 3x - 4$ b) $-5x+3-2x^2$ c) $-x^2 - 4x - 4$ d) $-6-3x+3x^2$

8. Factorizar las siguientes expresiones combinando los casos anteriores

   a) $8x^2 + 16xy + 8y^2$ b) $ha^2 - 2hab + hb^2$ c) $d^2 - 8d + 16 + d - 4$
   d) $z^3 - 2z^2y + zy^2$ e) $36ac^2 - 12ac^3 + ac^4$ f) $x^5 - x$
   g) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$ h) $3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x$ i) $x^5 + x^3 + x^2 + 1$
   j) $x^4 + 3x^3 + 2x^2$ k) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ sabiendo que $a = -2$ es raíz
   l) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sabiendo que $a = 1$ es raíz

9. Factorizar y simplificar las siguientes expresiones

   a) $\dfrac{24x^2}{12x^3}$ b) $\dfrac{2b}{4b^2 + b}$ c) $\dfrac{xy - y^2}{x^2 - y^2}$ d) $\dfrac{9 + 6x + x^2}{9 - x^2}$

10. Simplificar y resolver

    a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x} \cdot \dfrac{6x - 12}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ b) $\dfrac{7x}{x^3 - x} \cdot \dfrac{x - 1}{x + 5} \cdot \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

    c) $\dfrac{x - 6}{x^2 - 25} \cdot \dfrac{x + 5}{x^2 - 6x}$ d) $\dfrac{x + 1}{x - 1} \cdot \dfrac{1}{x^2 - 1}$ e) $\dfrac{y + 1}{y^2 - 2y + 1} \cdot \dfrac{y^2 - 1}{y^2 + 2y + 1}$

f) $\dfrac{y^2-4}{y^2-9} \div \dfrac{y-3}{y+3}$ g) $\dfrac{x+1}{7-x} \div \dfrac{x^2-1}{x^2-49}$ h) $\dfrac{z^2+4z+4}{x} \div \dfrac{z^2-4}{zx-2x}$

11. Resolver

a) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}$ b) $\dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{1}{x+2}$ c) $\dfrac{y}{y^2-6y+9} + \dfrac{2}{y^2-9}$

d) $\left(\dfrac{2}{x+1} \div \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^2-1}{x}$ e) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{z+1} \cdot \dfrac{z^2-1}{z}$ f) $\left(\dfrac{1}{y+2} - \dfrac{1}{y-2}\right) \div \dfrac{4}{y^2-4}$

6. Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos: Conocer los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, así como su aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x, y (las incógnitas aparecen elevadas a la primera potencia) tiene una forma general:

$$\begin{cases} ax + by = & c \\ dx + ey = & f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

6.1. Solución del sistema

El par (x_0, y_0) es solución del sistema: si al reemplazar x por x_0 e y por y_0 ambas ecuaciones se transforman en identidades numéricas.

Un sistema lineal puede tener **solución única**, **infinitas soluciones** o no tener **ninguna solución**.

6.1.1. Método de sustitución

Despejando de una ecuación una de las incógnitas y reemplazando en la otra ecuación la expresión obtenida.

6.1.2. Método de igualación

Despejando la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualando.

Ejemplos:

1) Sistema con **solución única**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución.

De la primera ecuación: $x = \dfrac{12 - 3y}{2} \quad (*)$

Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene: $4\left(\dfrac{12 - 3y}{2}\right) - 3y = 6$

Luego $24 - 6y - 3y = 6$ entonces $y = 2$ y con este valor en $(*)$ resulta $x = 3$.

La solución es $(3\,,2)$

2) Sistema con **infinitas soluciones**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x - 6y = -24 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución.
De la primera ecuación: $x = \dfrac{12-3y}{2} \quad (*)$
Sustituyendo en la segunda ecuación se tiene: $-4\left(\dfrac{12-3y}{2}\right) - 6y = -24$
Luego $-24 - 6y + 6y = -24$ entonces $0 = 0$ o mejor dicho cualquier valor de y satisface la ecuación, tomando $y = \alpha$ (donde α es cualquier real) y sustituyendo en $(*)$ resulta $x = \dfrac{12-3\alpha}{2}$.
Las soluciones son $\left(\dfrac{12-3\alpha}{2}, \alpha\right)$ para cualquier número real α.

3) Sistema **sin solución**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

Intentemos resolver por igualación.
De la primera ecuación: $x = \dfrac{12-3y}{2}$
De la segunda ecuación: $x = \dfrac{6-6y}{4}$
Luego $\dfrac{12-3y}{2} = \dfrac{6-6y}{4}$

Entonces $48 - 12y = 12 - 12y$, lo cual evidentemente es una contradicción y no existe ningún valor de y que satisfaga la igualdad.

Concluimos que no existe ninguna solución para el sistema.

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario.

1. Resolver los siguientes sistemas y verificar la solución obtenida

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3x = 1 - 6y \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ 3x - 2 = x + 6y + 2 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes problemas

a) La suma de dos números es 28 y su diferencia 6. Calcular dichos números.

b) Una botella y su corcho cuestan \$45 y la botella cuesta \$39 más que el corcho. ¿Cuánto cuesta la botella y cuánto el corcho?

c) Uno de los ángulos de un triángulo mide 52° y la diferencia de los otros dos es 88°. ¿Cuánto mide cada uno de esos ángulos? (*Recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°*)

d) Calcular dos números si la mitad del primero, más un tercio del segundo es 17; y un tercio del primero, más un medio del segundo es 18.

e) En un corral hay entre pollos y cabritos 23 animales; si se cuentan 60 patas. ¿Cuántos pollos y cuántos cabritos hay?

f) La diferencia de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es igual a 26°. ¿Cuánto mide cada ángulo?

g) Por un par de zapatos se paga el triple que por una corbata, gastando en total por los dos artículos \$2400. Calcular el costo de cada uno.

h) Dividiendo el mayor de dos números naturales por el menor se obtiene el cociente igual 3 y el resto igual a 1; si se divide el mayor por el menor aumentado en uno, el cociente es 2 y el resto 3. Calcular ambos números.

i) Se cambian \$1000 en billetes de \$10 y \$50, recibiendo 24 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase se obtienen?

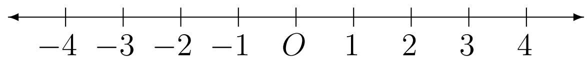
j) Se quiere separar $70\,g$ de oro en dos partes, de tal manera que la mayor tenga $20\,g$ más que la menor. ¿Cuántos gramos debe tener cada parte?

7. Conjuntos en la recta y el plano coordenado

Objetivos: Conocer la ubicación de puntos y conjuntos en la recta y en el plano en particular las rectas y sus ecuaciones.

7.1. Coordenadas rectangulares en la recta

Trazamos una recta horizontal y un punto O, llamado origen. A la derecha del origen se ubican los números positivos y a la izquierda los negativos.



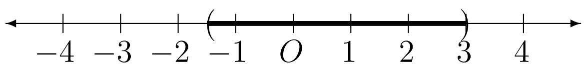
Notación: Para simbolizar un número en la recta utilizaremos un punto "•" o una raya vertical "|" en la posición (a veces aproximada) dónde se encontraría dicho número.

Para marcar un intervalo de puntos en la recta utilizaremos corchetes "[ ]" o paréntesis "( )" para marcar los extremos del intervalo deseado, dependiendo si los extremos están incluidos o no en el intervalo (respectivamente). Estas notaciones podrán combinarse cuando los conjuntos contengan a un extremo y al otro no o incluso utilizarse un solo delimitador, en los casos en que el intervalo tenga solamente un extremo.

Esta misma notación (de paréntesis y corchetes) se utilizará para representar a los intervalos por si mismos, escribiendo los extremos (siempre el menor antes que el mayor), separados por coma o punto y coma y encerrados entre paréntesis o corchetes (o una combinación de ambos) según corresponda.

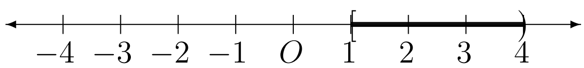
Veamos todo esto mejor con algunos ejemplos:

1. Si queremos denotar el conjunto de los números mayores que -1,5 pero menores que 3, podríamos representarlo en la recta numérica como:

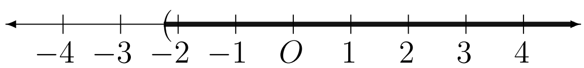
   Y utilizando la notación de intervalos como: $(-1,5\ ,\ 3)$

2. Al conjunto de los números mayores o iguales que 1 pero menores que 4 lo podemos representar en la recta numérica como:

   Y utilizando la notación de intervalos como: $[1\ ,\ 4)$

3. Los números mayores que $-\sqrt{5}$ podrán representarse en la recta numérica como:

   Y utilizando la notación de intervalos como: $(-\sqrt{5}\ ,\ \infty)$

7.2. Coordenadas rectangulares en el plano

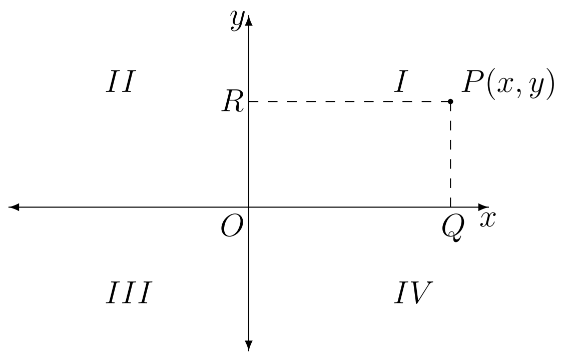
Trazamos dos rectas perpendiculares en el plano que llamaremos eje x y eje y; el punto de intersección O se llama origen de coordenadas. El plano queda así dividido en cuatro regiones que se llaman **cuadrantes** y que se numeran I, II, III, IV.

Representamos los números sobre cada eje tomando una misma unidad sobre cada uno. Por convención, sobre el eje x colocamos los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda; sobre el eje y, colocamos los números positivos arriba del 0 y los negativos debajo del 0.

Coordenadas de un punto: A un punto P del plano le asociamos dos números (ordenadamente) de la siguiente manera:

- Trazamos una perpendicular al eje x; al punto Q le corresponde un número x en el eje x.

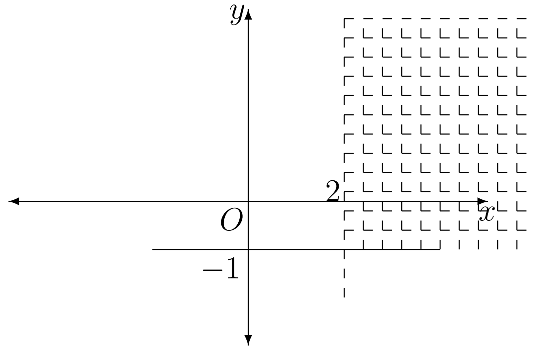
- Trazamos una perpendicular al eje y; al punto R le corresponde un número y en el eje y.



Decimos que P tiene coordenadas (x, y), la primera coordenada x se llama **abscisa** de P y la segunda se llama **ordenada** de P. Recíprocamente, dado un par ordenado de números (x, y) es evidente que hay un punto P del plano del cual son las coordenadas. Usualmente se identifica el punto P con sus coordenadas (x, y) y se escribe $P(x, y)$.

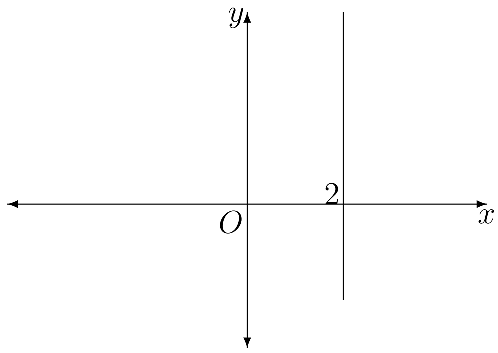
Ejemplo:

El conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas verifican $x > 2$ e $y \geq -1$, que se escribe: $A = \{(x, y) : x > 2 \ ; \ y \geq -1\}$ se representa cuadriculado en el gráfico siguiente.

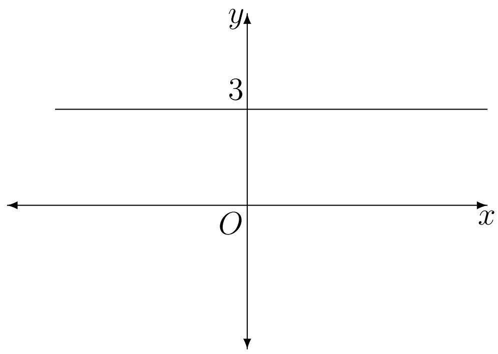


7.3. Rectas en el plano

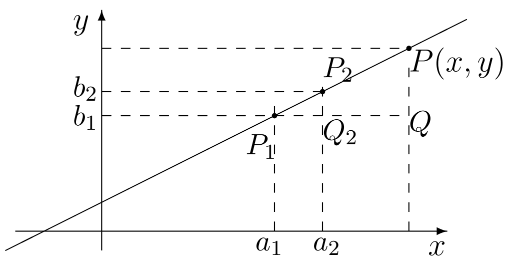
Si consideramos los conjuntos de puntos en el plano:
a) $L_1 = \{(x, y) : x = 2\}$ su representación gráfica es una recta vertical



b) $L_2 = \{(x, y) : y = 3\}$ se representa con una recta horizontal



c) Si consideramos la recta L que pasa por los puntos $P_1(a_1, b_1)$ y $P_2(a_2, b_2)$, con $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$, entonces:



Los triángulos $P\overset{\triangle}{P_1}Q$ y $P_2\overset{\triangle}{P_1}Q_2$ son semejantes y por lo tanto sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{y - b_1}{b_2 - b_1} = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

A partir de esta última ecuación, despejando y agrupando podemos llegar a la expresión:

$$y - b_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1)$$

El cociente $\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ es un número constante para una recta dada (independientemente de los puntos que tomemos sobre la misma) que da una idea de la "inclinación" de la misma. Este número recibe el nombre de **pendiente** de la recta y lo denotaremos en esta guía con la letra m. Si reemplazamos esto en la última expresión tendremos que:

$$y - b_1 = m(x - a_1)$$

Operando y despejando y obtenemos:

$$y = mx - ma_1 + b_1$$

Ordenada al origen

La cantidad $-ma_1 + b_1$ también es constante para una recta dada (independientemente del punto que tomemos sobre la misma) y recibe el nombre de **ordenada al origen** (ya que es el punto donde la recta corta al eje y). A esta cantidad la denotaremos en este texto con la letra b. Si reemplazamos esto en la expresión anterior obtenemos:

Ecuación explícita de la recta

$$y = mx + b$$

Operando también podemos llegar a una ecuación lineal de dos variables de la forma $Ax + By + C = 0$. Así, $L = \{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$.

Ecuaciones de rectas en el plano

Con estos argumentos hemos mostrado que si L es una recta del plano:

1. Si L es **vertical**, tiene ecuación $\boxed{\boldsymbol{x = c}}$

   $L = \{(x, y) : x = c\}$.

2. Si L es **horizontal**, tiene ecuación $\boxed{\boldsymbol{y = c}}$

   $L = \{(x, y) : y = c\}$

3. Si L no es **ni horizontal ni vertical** y pasa por los puntos $P_1(a_1, b_1)$ y $P_1(a_2, b_2)$, entonces tiene por ecuación:

   $$\boxed{\boldsymbol{\frac{y - b_1}{b_2 - b_1} = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}}}$$

   Que ya vimos que se puede llevar a su forma explícita, de la forma:

   $$\boxed{\boldsymbol{y = mx + b}}$$

   Dónde $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ es la pendiente y b es la ordenada al origen.

   $L = \{(x, y) : y = mx + b\}$

Teorema: El conjunto de puntos que verifica una ecuación lineal: $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$ ó $B \neq 0$) es una recta del plano.

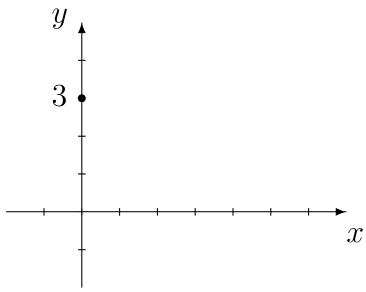
7.3.1. Gráfica de una recta a partir de su ecuación explícita

Si conocemos la ecuación explícita de una recta $y = mx + b$ podemos graficarla siguiendo los siguientes pasos:

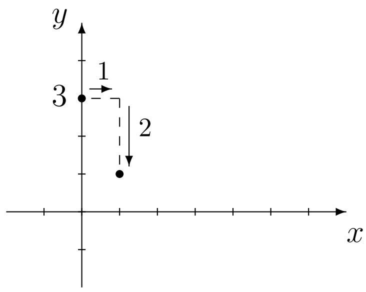
- A partir de la ordenada al origen b marcamos el punto donde la recta corta al eje y.
- Desde ese punto nos desplazamos según la pendiente m, para encontrar un segundo punto sobre la recta. Para esto pensamos a la pendiente como un cociente (a veces con denominador 1) y nos desplazamos la cantidad que indique el denominador en la dirección del eje x y la cantidad que indique el numerador en la dirección del eje y.
- Trazamos la recta que pasa por los dos puntos encontrados.

Ejemplo:
Sea la recta $y = -2x + 3$

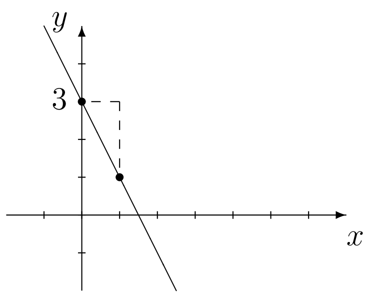
Ubicamos el punto donde la recta corta al eje y (en este caso 3)



Pensamos a la pendiente -2 como un cociente $\frac{-2}{1}$ y por lo tanto nos deberemos desplazar, por ejemplo, 1 unidad en la dirección del eje x (es decir 1 unidad hacia la derecha) y -2 unidades en la dirección del eje y (es decir 2 unidades hacia abajo).

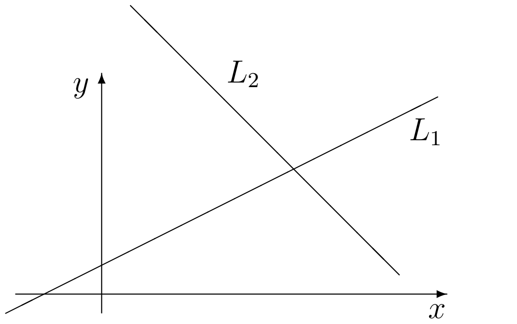


Finalmente trazamos la recta que pasa por estos dos puntos.

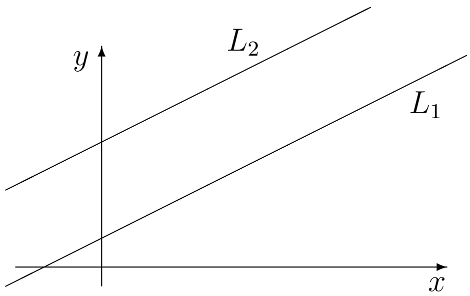


7.3.2. Posición relativa de dos rectas

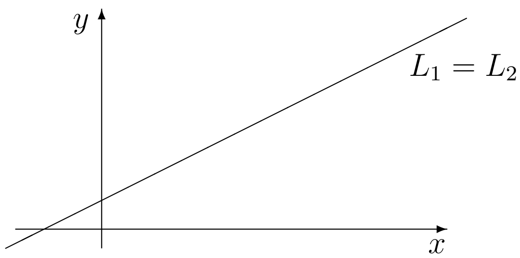
Dos rectas L_1 y L_2 del plano pueden ser:



Transversales: si se cortan en un punto.



Paralelas: si no se cortan.



Coincidentes: si $L_1 = L_2$

Puesto que cada recta tiene una ecuación lineal:

$L_1 : A_1x + B_1y = C_1$
$L_2 : A_2x + B_2y = C_2$

Los puntos de intersección, si los hubiera, deben verificar ambas ecuaciones, es decir, el sistema lineal

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = & C_1 \\ A_2x + B_2y = & C_2 \end{cases}$$

Decir que las rectas son **transversales** es lo mismo que decir que el sistema admite una **solución única**.

Decir que las rectas son **paralelas** es lo mismo que decir que el sistema no tiene **ninguna solución**.

Decir que las rectas son **coincidentes** es lo mismo que decir que el sistema tiene **infinitas soluciones**.

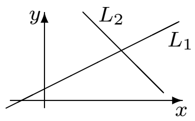
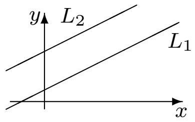
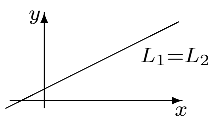
Por otro lado, si llevamos la ecuación de cada recta a su forma explícita obtendremos que:
$L_1 : y = m_1x + b_1$
$L_2 : y = m_2x + b_2$

Si las rectas son **transversales** sus **pendientes serán diferentes**.

Si las rectas son **paralelas** sus **pendientes serán iguales** pero sus **ordenadas al origen serán distintas**.

Si las rectas son **coincidentes** sus **pendientes y** sus **ordenadas al origen serán iguales**.

En resúmen:

Posición relativa entre rectas	**Intersección**	**Sistema de ecuaciones**	**Pendiente y ordenada al origen**
Transversales 	Un sólo punto	Única solución	$m_1 \neq m_2$
Paralelas 	Ningún punto	Sin solución	$m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$
Coincidentes 	Infinitos punto	Infinitas soluciones	$m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Representar los siguientes conjuntos de la recta

   a) $A = \{x : 2 < x \leq 3,5\}$
   b) $B = \{x : 2 \leq x < 6\}$
   c) $C = \{x : -2 \leq x < 4\}$
   d) $D = \{x : -1,5 < x < 6\}$
   e) $E = \{x : x = 6\}$
   f) $F = \{x : x \neq 0\}$

2. Representar en el plano los siguientes pares ordenados y decir a que cuadrante pertenecen

   $P_1(2\,, -1)$ $P_2(-2\,, 1)$ $P_3(5/2\,, 3)$ $P_4(1/2\,, -2)$ $P_5(-3\,, -1/2)$

3. Representar los siguientes conjuntos del plano

   a) $A = \{(x, y) : x > -1\}$
   b) $B = \{(x, y) : y \leq 4\}$
   c) $C = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 3,5 \wedge y > 0\}$
   d) $D = \{(x, y) : x.y < 0\}$

e) $E = \{(x, y) : x = y\}$ f) $F = \{(x, y) : x = y \wedge x > -1\}$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados

   a) $(2, 3) \quad (4, 5)$ b) $(1, \frac{1}{3}) \quad (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ c) $(5, -1) \quad (-5, -1)$

   d) $(-1, 5) \quad (-1, \frac{3}{4})$ e) $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}) \quad (0, 0)$ f) $(1, -1) \quad (-1, 1)$

5. Sea L la recta que pasa por $P_1(-1, 0)$ y $P_2(5, 1)$

   a) Hallar la ecuación de L y comprobarla.
   b) Mostrar otros dos puntos de L.
   c) ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a L?:
      $Q_1(3, \frac{6}{7}) \qquad Q_2(10, 2) \qquad Q_3(-7, -1)$

6. Representar gráficamente los conjuntos de puntos que verifican la ecuación dada

   a) $5x + y = 3$ b) $3x - 6 = 0$ c) $x - 2 = 0$

   d) $y - 2 = 0$ e) $4x - 3y = 6$ f) $y = 0$

7. Determinar el valor de k para que el punto dado pertenezca a la recta dada

   a) $2x + ky = 0 \qquad (-1, 3)$
   b) $(k - 1)x + 3ky = 2(k + 1) \qquad (2, -2)$

8. Representar gráficamente los conjuntos

   a) $A = \{(x, y) : 2x - y = 1 \ \wedge \ x > 0\}$
   b) $B = \{(x, y) : -x + y = 2 \ \wedge \ y < 0\}$

9. Encontrar los puntos de intersección con los ejes coordenados de las siguientes rectas

   a) $4x - y = 10$ b) $3x = -y - 8$ c) $x = 2$

   d) $x + y - 3 = 0$ e) $y - 1 = -2$ f) $y = -2x + 5$

10. Representar gráficamente los siguientes pares de rectas indicando si son transversales, paralelas o coincidentes. En el caso de ser transversales indicar el punto de intersección

    a) L: $4x + 3y = 11 \quad L'$: $3x - y = 18$
    b) L: $x + y - 3 = 0 \quad L'$: $2x + 2y = 5$
    c) L: $x - 3 = y + 1 \quad L'$: $x + 1 = 8(y - 2)$
    d) L: $x - y = 1 \quad L'$: $4x - 2y = 4$

11. Hallar los vértices del triángulo determinado por las rectas L_1: $3x - 2y = -6$ L_2: $2y + x = 6 \qquad L_3$: $6y - x = 2$ y representarlo gráficamente

8. Logaritmos

Objetivos: Conocer la definición y propiedades de los logaritmos y su aplicación a la resolución de ecuaciones. Aplicación a la solución de problemas de diverso origen y motivación.

8.1. Definición

Defini de log

Sea $N > 0$ y b un número real positivo y distinto de 1, el logaritmo de N en base b es un número c, tal que b elevado a la c es igual a N.

$$\boxed{\log_b N = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = N}$$

Al número b se lo llama **base** del logaritmo, al número N (o a la expresión a la que se le esté calculando el logaritmo) se lo llama **argumento** del logaritmo y el número c es el **resultado** de la operación.

Aclaración: La expresión $\log_2 8$ se lee: "el logaritmo en base dos de ocho"y el resultado de dicha operación será el número al cual se debe elevar 2 para que de 8 (en este caso 3).

Ejemplos:

$$\log_5 125 = 3 \quad \text{porque} \quad 5^3 = 125$$

$$\log_2 64 = 6 \quad \text{porque} \quad 2^6 = 64$$

Notación: A veces se omite especificar la base del logaritmo cuando se desea calcular el logaritmo en **base 10** (por ejemplo en la mayoría de las calculadoras) y por lo tanto se nota simplemente **log**.

Otra base importante es la **base** $\boldsymbol{e}$(que es un número irracional que analizaremos con más detalle durante el curso de Matemática y vale aproximadamente $2,718281828459...$). El logaritmo en esta base se llaman **logaritmo natural** y se nota **ln**.

Ejemplos:

$$\log 1000 = 3 \qquad\qquad \ln e = 1$$

8.1.1. Propiedades

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\boxed{\log_b(n.m) = \log_b n + \log_b m}$$

Ejemplo:

$$\log_2(64 \cdot 16) = \log_2 64 + \log_2 16 = 6 + 4 = 10$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m}}$$

Ejemplo:

$$\log_3 \frac{27}{81} = \log_3 27 - \log_3 81 = 3 - 4 = -1$$

Logaritmo de una potencia

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_b a^n = n \log_b a}}$$

Ejemplo:

$$\log_4 16^7 = 7 \log_4 16 = 7 \cdot 2 = 14$$

- Fórmula del cambio de base: Permite calcular cualquier logaritmo en base b mediante otros logaritmos en cualquier otra base a:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}}$$

Ejemplo:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

A veces es necesario combinar estas propiedades (en el orden adecuado) para poder realizar una operación con logaritmos de forma más sencilla.

Ejemplo:

$$\log_3 \frac{81 \cdot 9^5}{\sqrt{27}} = \log_3 81 \cdot 9^5 - \log_3 \sqrt{27} = \log_3 81 + \log_3 9^5 - \log_3 27^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \log_3 81 + 5 \log_3 9 - \frac{1}{2} \log_3 27 = 4 + 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 4 + 10 - \frac{3}{2} = \frac{25}{2}$$

8.2. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Uno podría encontrarse en algunas situaciones donde deba encontrar la solución (o soluciones) de una ecuación donde la incógnita se encuentra en el argumento de un logaritmo o en la base de un logaritmo (las llamadas ecuaciones logarítmicas), o en el exponente de una potencia (ecuaciones exponenciales). En ambos casos será necesario utilizar las propiedades y la definición del logaritmo para resolverlas.

Veremos ahora algunas de las técnicas que se pueden utilizar para resolver este tipo de ecuaciones y llevarlas a alguna ecuación "tradicional" que tendrá entre sus soluciones a la solución (o soluciones) de la ecuación original.

8.2.1. Ecuaciones logarítmicas

Para resolver las ecuaciones logarítmicas será necesario aplicar las propiedades del logaritmo hasta obtener una ecuación donde aparezca un único logaritmo y luego utilizar la definición de logaritmo para poder obtener una nueva ecuación que se pueda resolver por métodos tradicionales.

Ejemplos:

1. $$\begin{gathered} \log_4(x+3) = 2 \\ 4^2 = x+3 \\ 16-3 = x \\ \boxed{x = 13} \end{gathered}$$

   Aplicando la definición de logaritmo
   Operando y despejando la ecuación que resultó

   Como siempre, podemos comprobar si la solución encontrada es la correcta. Efectivamente $\log_4(13+3) = \log_4 16 = 2$

2. $$\begin{gathered} \log_2 3 + \log_2(x-1) = 3 \\ \log_2(3(x-1)) = 3 \\ 2^3 = 3(x-1) \\ 8 = 3x-3 \\ \boxed{x = \frac{11}{3}} \end{gathered}$$

   Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto
   Aplicando la definición de logaritmo
   Operando
   Despejando

3. $$\begin{gathered} \log_2(-x) + \log_2(1-x) = 1 \\ \log_2(-x(1-x)) = 1 \\ 2^1 = -x(1-x) \\ 2 = -x + x^2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ x_1 = 2 \;\text{ y }\; x_2 = -1 \end{gathered}$$

   Por la propiedad del logaritmo de un producto
   Aplicando la definición del logaritmo
   Operando
   Despejando
   Resolviendo la ecuación de segundo grado

   Comprobaremos ahora estos resultados:

   - Con $x = 2$: $\log_2(-2) + \log_2(1-2)$ la cual es una operación que no puede realizarse, ya que el argumento del logaritmo no puede ser un número negativo. Por lo tanto $x = 2$ **no es solución de la ecuación original** (por más que es solución de la ecuación de segundo grado que se obtiene de ésta).
   - Con $x = -1$: $\log_2(-(-1)) + \log_2(1-(-1)) = \log_2 1 + \log_2 2 = 0 + 1 = 1$. Por lo tanto $\boxed{x = -1}$ es la única solución de la ecuación original.

8.2.2. Ecuaciones exponenciales

Para resolver las ecuaciones exponenciales existen diferentes métodos. Todos ellos usan de forma directa o indirecta la definición y las propiedades del logaritmo. En esta guía explicaremos tres de estos métodos, muy similares en esencia, a los cuales llamaremos de forma arbitraria métodos 1, 2 y 3.

Todas las ecuaciones que veremos se pueden resolver por cualquiera de estos métodos, pero alguno puede resultar más sencillo de utilizar en cada caso.

A continuación se explican estos métodos y se usarán los tres para resolver la misma ecuación exponencial: $8^{x-1} = 4$

Método 1 Para resolver la ecuación exponencial por este método se aplica el logaritmo (en una base adecuada) a ambos lados de la igualdad. Luego se usan las propiedades del logaritmo hasta obtener una ecuación que se pueda despejar de forma "tradicional".

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 8^{x-1} &= 4 && \text{Aplicando el logaritmo en base 2 a ambos lados}\\ \log_2(8^{x-1}) &= \log_2 4 && \text{Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia}\\ (x-1)\log_2 8 &= \log_2 4 && \text{Resolviendo los logaritmos}\\ (x-1)3 &= 2 && \text{Despejando}\\ x &= \frac{2}{3}+1 \\ \boxed{x = \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Método 2 En este caso se recurre a aplicar la definición del logaritmo (en sentido inverso al habitual) y luego utilizar las propiedades del logaritmo para obtener una ecuación "tradicional" y resolverla.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 8^{x-1} &= 4 && \text{Aplicando la definición del logaritmo}\\ \log_8 4 &= x-1 && \text{Aplicando cambio de base (en una base adecuada)}\\ \frac{\log_2 4}{\log_2 8} &= x-1 && \text{Resolviendo los logaritmos}\\ \frac{2}{3} &= x-1 && \text{Despejando y operando}\\ \boxed{x = \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Método 3 En este caso se busca escribir ambos lados de la igualdad como potencias de una misma base. Luego se igualan los exponentes y se resuelve la ecuación que resulta.

En este método, al momento de igualar los exponentes, se están utilizando las propiedades del logaritmo de forma indirecta.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
8^{x-1} &= 4 && \text{Escribiendo ambos miembros como potencias de una misma base}\\
(2^3)^{x-1} &= 2^2 && \text{Aplicando la propiedad de las potencias de potencias}\\
2^{3(x-1)} &= 2^2 && \text{Igualando los exponentes}\\
3(x-1) &= 2 && \text{Despejando y operando}\\
&\boxed{x = \frac{5}{3}}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Calcular utilizando la definición

   a) $\log_2 256$ b) $\log_3 81$ c) $\log_5 1/5$ d) $\log_2 1/8$

   e) $\log_4 1/4$ f) $\log_9 3$ g) $\log_{1/3} 27$ h) $\log_{10} 0,1$

   i) $\log_{10} 1$ j) $\log_{10} 0,01$ k) $\log_2 0,25$ l) $\log_5 0,2$

2. Calcular utilizando las propiedades

   a) $\log_2 \frac{1}{8}$ b) $\log_4 \frac{1}{4}$ c) $\log_4 \frac{16 \cdot 256}{64}$ d) $\log_3(27^7 \cdot 9^{12})$

   e) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{256}$ f) $\log_{10} \frac{\sqrt{1000}}{100}$ g) $\log_5(\sqrt[5]{125}\sqrt[8]{25})$ h) $\log_3 \frac{\sqrt{27}}{9 \cdot 81}$

3. Calcular, usando cambio de base

   a) $\log_8 4$ b) $\log_9 \frac{1}{3}$ c) $\log_{125} \frac{1}{25}$

4. Calcular los siguientes logaritmos utilizando la calculadora. Comparar los resultados con el orden de magnitud de los argumentos (ver el ej. 1 del anexo de notación científica, en la página 86)

   a) $\log_{10} 2000$ b) $\log_{10} 50000$ c) $\log_{10} 30000000$

   d) $\log_{10} 0,12$ e) $\log_{10} 0,00015$

5. Calcular los logaritmos del ejercicio 1) utilizando un cambio a la base 10 (los valores en la base 10 obténgalos de la calculadora).

6. Calcular los logaritmos del ejercicio 1) utilizando un cambio a la base e (los valores en la base e obténgalos de la calculadora).

7. Resolver las siguientes ecuaciones

   a) $\log_{10} 2x = 3$
   b) $\log_5 4x = 2$
   c) $\log_2(x+1) = 4$
   d) $\log_{15}(x^2 + 3x + 5) = 1$
   e) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$
   f) $\log_{10} 2x - \log_{10}(x-5) = \log_{10} 3$
   g) $\log_{10}(\log_{10} x) = 3$
   h) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 4$

8. Resolver las siguientes ecuaciones (usar la base más adecuada):

   a) $2^{x+1} = 128$
   b) $27^{3x-2} = 9$
   c) $25^{x-3} = 25^{2x+3}$
   d) $4^{x^2} = 16^{2x-2}$
   e) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$
   f) $3^{3x} = (\frac{1}{3})^{3x+2}$

9. Trigonometría

Objetivos: Resolver problemas geométricos a través de la resolución de triángulos.

9.1. Ángulos

9.1.1. Definición

Un ángulo es una región del plano limitada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial. A las dos rectas se les denomina lados del ángulo y al punto inicial se le llama vértice del ángulo.

9.1.2. Sistema sexagesimal de medición de ángulos

Se divide una circunferencia en 360 arcos iguales, las semirrectas que pasan por los extremos del arco y parten del centro determinan un ángulo de un grado sexagesimal ($1°$). Del mismo modo, cada ángulo de un grado se divide en 60 y entonces cada uno de estos ángulos mide un minuto ($1'$). Cada ángulo de un minuto se divide en 60, luego, cada uno de esos ángulos mide un segundo ($1''$)

9.1.3. Sistema circular de medición de ángulos

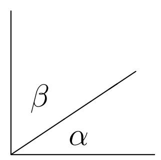
La medida de un ángulo en radianes queda definida como el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio en cualquier circunferencia que tenga como centro el vértice del ángulo.

Equivalencia Es fácil ver que si un ángulo mide $360°$ en el sistema sexagesimal entonces mide 2π radianes en el sistema circular. Esta relación permite pasar de un sistema de medición angular a otro.

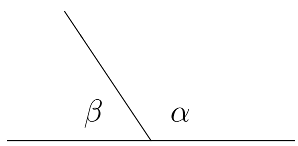
9.1.4. Ángulos complementarios y suplementarios

Ángulos complementarios Dos ángulos agudos α y β se dicen complementarios si se cumple que $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$.

Ángulos suplementarios Dos ángulos α y β (positivos) se dicen suplementarios si se cumple que $\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$.

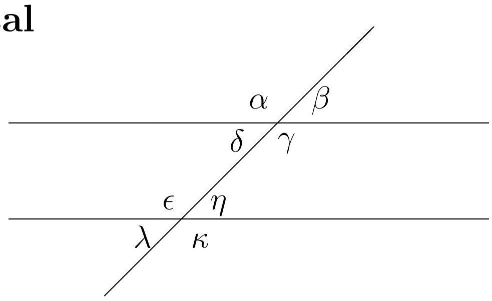


Complementarios



Suplementarios

9.2. Ángulos determinados entre dos rectas paralelas y una transversal



Son iguales las medidas de las siguientes parejas de ángulos:

Opuestos por el vértice: Son los ángulos α y γ; β y δ; ϵ y κ; η y λ.

Correspondientes: Son los ángulos α y ϵ; β y η; δ y λ; γ y κ.

Alternos Internos: Son los ángulos δ y η; γ y ϵ.

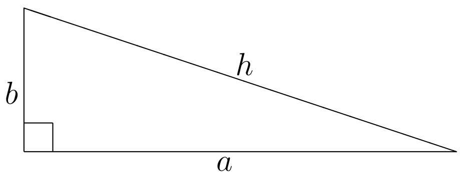
Alternos Externos: Son los ángulos α y κ; β y λ.

9.3. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo (con un ángulo recto, es decir, de 90°) se llama hipotenusa al lado opuesto al ángulo recto y catetos a los lados adyacentes al ángulo recto.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$\boxed{\boldsymbol{a^2 + b^2 = h^2}}$$

9.4. Razones trigonométricas

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas son relaciones entre los lados del triángulo y sólo dependen de los ángulos de éste.

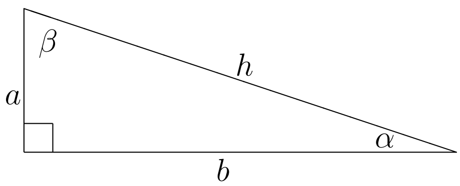


figura 1

$$\boxed{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{a}{h}}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{b}{h}}$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}}$$

Notar que: Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo con la misma medida α son semejantes. Por lo tanto **las razones trigonométricas dependen del ángulo no de las longitudes de los lados del triángulo** .

Notar que: Debido a la definición de $\operatorname{tg}\alpha$ se puede deducir que $\boxed{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}$

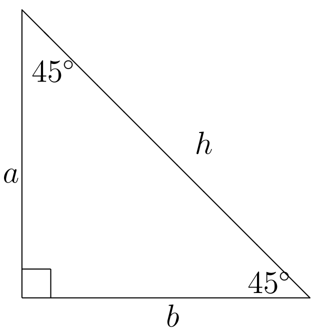
Propiedad:
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{h}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{h^2}$
como $a^2 + b^2 = h^2$ por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\mathbf{sen}^2\,\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{cos}^2\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}}$$

9.4.1. Angulos especiales

Calcular los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de a) 45° b) 30° c) 60°

a) Si $\alpha = 45°$, $\quad \beta = 90° - \alpha = 45°$



$\operatorname{sen}45° = \cos 45°$

Luego $a = b$

Por Pitágoras $a^2 + a^2 = h^2$

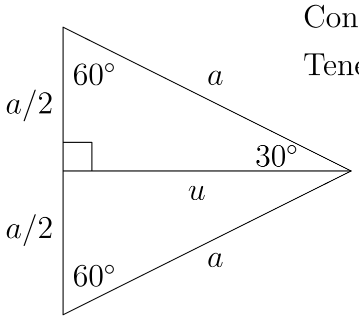
$2a^2 = h^2 \qquad a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}45° = \dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{h\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname{sen}45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \operatorname{tg}45° = 1$$

b) y c) Consideremos un triángulo equilátero.



Considerando una altura, divide uno de los ángulos por la mitad.

Tenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa a y cateto $a/2$

Por Pitágoras $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + u^2$

Despejando: $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \qquad$ Luego $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ =sen 60°

$\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2} = \cos 60°$

$$\operatorname{sen}30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad\qquad \cos 30° = \operatorname{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

En resúmen **Razones trigonométricas de ángulos especiales**

ángulo	seno	coseno	tangente
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Ejemplo:
Resolver un triángulo donde el cateto $a = 2\ cm$ y su ángulo opuesto $\beta = 60°$

Como $\alpha + \beta = 90° \quad \alpha = 30°$

Como $\cos\beta = \dfrac{a}{h} \qquad \cos 60° = \dfrac{2\ cm}{h}$

Luego $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2\ cm}{h} \qquad h = 4\ cm$

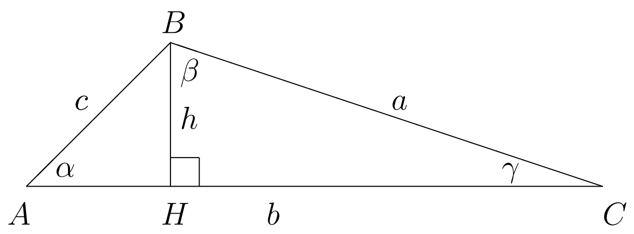
Como $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} 60° = \dfrac{b}{2}$

Luego $\sqrt{3} = \dfrac{b}{2} \qquad b = 2\sqrt{3}\text{cm}$

9.5. Teorema del seno y Teorema del coseno

Teorema del seno El teorema del seno establece la relación que existe entre los lados y ángulos en cualquier triángulo.

Si se traza una altura en el triángulo (en la figura la altura que corresponde al lado b) quedan determinados dos triángulos rectángulos : $A\overset{\Delta}{B}H$ y $H\overset{\Delta}{B}C$



en el triángulo $A\overset{\Delta}{B}H$: $\quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$

en el triángulo $H\overset{\Delta}{B}C$: $\quad \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a}$

de donde se deduce que: $h = c \operatorname{sen} \alpha$ $\quad$ $h = a \operatorname{sen} \gamma$ y $c \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \gamma$
Luego:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Si se repite el mismo proceso trazando una altura correspondiente a otro lado del triángulo (por ejemplo la del lado c)

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Luego:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}}}$$

Teorema del seno

Teorema del coseno Observando la figura del triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras a cada triángulo rectángulo tenemos:

$$c^2 = h^2 + (b - \overline{CH})^2 = h^2 + b^2 - 2b\overline{CH} + \overline{CH}^2$$

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2$$

pero $\overline{CH} = a \cos \gamma$ entonces:

$$c^2 = a^2 - \overline{CH}^2 + b^2 - 2b\overline{CH} + \overline{CH}^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma}}$$

De la misma forma, utilizando las otras alturas del triángulo (las correspondientes a los otros lados), se podrían obtener otras dos versiones del teorema del coseno:

$$\boxed{\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha}}$$

Aclaración: Tanto en el teorema del seno como en el teorema del coseno puede ser necesario tener que calcular el valor del seno o del coseno de ángulos mayores a 90°. Para esos casos será necesario utilizar las siguientes expresiones:

<u>Si $90° < \alpha < 180°$</u> :

$$\boxed{\boldsymbol{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)}} \qquad \boxed{\boldsymbol{\cos \alpha = -\cos(180° - \alpha)}}$$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

En cada uno de los siguientes ejercicios realice un esquema utilizando una escala adecuada.

1. Resolver los siguientes problemas

    a) Calcular cuanto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos miden 3 cm y 4 cm.

    b) Calcular cuanto miden los catetos de un triángulo rectángulo si la hipotenusa es de 15 cm y se sabe que un cateto mide el doble que el otro.

    c) Si el cateto mayor de un triángulo mide $\sqrt{12}$, ¿cuánto mide el cateto menor, si su hipotenusa mide el doble que éste?

    d) Calcular el área de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

2. Resolver utilizando la calculadora

    a) Calcular cuanto mide un cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 12 m y el otro cateto mide 4 m.

    b) Calcular cuanto mide la diagonal de un cuadrado de lado 9 m.

    c) Calcular cuanto mide el lado de un cuadrado cuya diagonal es de $1,5$ km.

    d) Si usted camina por diagonal 79 desde 1 y 60 hasta 6 y 54, ¿qué distancia camina? (Medir las distancias en cuadras).

3. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos especiales (ver tabla en la página 77)

    a) ¿Cuánto vale la hipotenusa de un triángulo si uno de sus catetos vale $5\sqrt{3}$ y el ángulo comprendido entre ellos vale 30°?

    b) ¿Cuánto vale el cateto opuesto a un ángulo de 45° si la hipotenusa del triángulo vale 8.

    c) En un triángulo cuya hipotenusa vale 7, ¿cuánto vale el coseno del ángulo cuyo cateto adyacente vale 4?

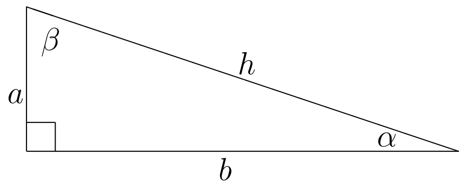
    d) Si en un triángulo la hipotenusa vale 10 y uno de sus catetos vale 8, ¿cuánto vale el coseno del ángulo opuesto a dicho cateto?

    e) En un triángulo cuya hipotenusa vale 6, ¿cuánto vale el ángulo cuyo cateto opuesto vale 3?

    f) ¿Cuánto vale la tangente de un ángulo si su seno vale $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y su coseno vale $\frac{3}{4}$?

4. Resolver utilizando la calculadora

   a) Con referencia un triángulo como el de la figura:

   I) Dados $\alpha = 32°$ y $a = 12$. Calcular: b, h y β.
   II) Dados $\alpha = 42°$ y $h = 28$. Calcular: b, a y β.
   III) Dados $a = 14$ y $b = 35$. Calcular: h, α y β.
   IV) Dados $h = 145$ y $a = 92$. Calcular: b, α y β.

   b) Se piensa construir una pista de aviación, al final de la misma quedará una arboleda de 25 m de altura. ¿A qué distancia mínima de la arboleda debe terminar la pista si el ángulo de despegue de los aviones es de 16°?

   c) Un automóvil asciende una cuesta que tiene una inclinación de 2° con la horizontal. Si viaja a una velocidad de 60 km/h, ¿cuántos metros varía su altura sobre el nivel del mar en 15 minutos?

   d) Un ingeniero forestal se encuentra parado a 30 m de un árbol. Mediante la utilización de un clinómetro mide un ángulo de 15° entre la horizontal y la parte más alta del árbol. Si el ingeniero mide $1,70$ m y el terreno no tiene pendiente, ¿cuánto mide el árbol?

5. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos especiales (ver tabla en la página 77)

   a) ¿Cuánto mide el lado opuesto a un ángulo de 45° de un triángulo, si otro de sus ángulos mide 60° y su lado opuesto mide $2\sqrt{3}$?

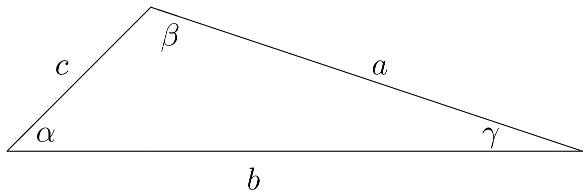
   b) Si en un triángulo dos de sus lados miden 3 y 5; y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°, ¿cuánto mide el otro lado?

   c) En un triángulo un lado mide $3\sqrt{3}$ y los otros dos miden 3. ¿Cuánto miden sus ángulos?

   d) En un triángulo, uno de sus lados mide $\sqrt{8}$ y el ángulo opuesto a éste mide 30°. Si otro de sus lados mide 4, ¿cuánto vale el ángulo opuesto a éste?

6. Resolver utilizando la calculadora

   a) Resolver los siguientes triángulos, con referencia a un triángulo como el de la figura:



   I) $a = 34 \quad b = 29 \quad c = 40$
   II) $a = 15 \quad \beta = 82° \quad \gamma = 29°$
   III) $a = 7 \quad b = 9 \quad \gamma = 60°$

   b) Calcular el área del triángulo cuyos lados miden: 4, 8 y 11 cm.

   c) En el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, el lado AB mide 10 cm y el lado BC mide el doble que el lado AC. Hallar las longitudes de los lados sabiendo que el ángulo A mide 60°.

   d) Si un triángulo tiene un lado que mide 20 y su ángulo opuesto mide 100°, ¿cuánto mide otro de sus lados, si el ángulo opuesto a éste mide 53°?

   e) Un triángulo tiene un lado de 3 y otro de 5. Si el ángulo opuesto al lado de 5 mide 70°, ¿cuánto mide el ángulo opuesto al lado de 3?

Anexo: Notación científica y Conversión de unidades

9.6. Notación científica

La notación científica es una manera de representar un número utilizando potencias de base diez. Se utiliza para poder expresar números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n \qquad \text{o} \qquad a \cdot 10^n \qquad \text{o} \qquad a\ 10^n$$

donde: a es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 o mayor que -10 y menor o igual que -1, que recibe el nombre de **coeficiente** y n es un número entero, que recibe el nombre de exponente u **orden de magnitud**.

Ejemplos:

$$5,25\ 10^4 \qquad 6,023 \cdot 10^{23} \qquad -2,233\ 10^3 \qquad 9 \times 10^{-9}$$

Aclaración: Expresiones como $12,05 \times 10^6$, $0,23\ 10^{-2}$ o $-34,55 \cdot 10^3$ no entrarían dentro de la definición formal de notación científica (ya que el coeficiente no cumple con los requerimientos que impone la definición), pero en la práctica podrían resultar igualmente útiles.

Algunas potencias de 10

Cuando los exponentes son mayores o iguales que cero

10^0	=	1
10^1	=	10
10^2	=	100
10^3	=	1000
10^4	=	10000
10^5	=	100000
10^{10}	=	10000000000
10^{20}	=	100000000000000000000

Cuando los exponentes son menores que cero

10^{-1}	=	$1/10$	=	0,1
10^{-2}	=	$1/10^2$	=	0,01
10^{-3}	=	$1/10^3$	=	0,001
10^{-4}	=	$1/10^4$	=	0,0001
10^{-5}	=	$1/10^5$	=	0,00001
10^{-10}	=	$1/10^{10}$	=	0,0000000001
10^{-20}	=	$1/10^{20}$	=	0,00000000000000000001

Algunos datos en forma tradicional (aproximados)

La masa de la tierra es de $5980000000000000000000000$ kg
La masa del electrón es de $0,000000000000000000000000000000911$ kg
El número de Avogadro es 602000000000000000000000 partículas/mol
La velocidad de la luz en el vacío es 299790000 m/s
La longitud de una célula típica es $0,000050$ m
La longitud de onda de la luz amarilla es $0,000000589$ m

Los datos anteriores expresados en notación científica

La masa de la tierra es $5,98\ 10^{24}$ kg
La masa del electrón es $9,11\ 10^{-31}$ kg
El número de Avogadro es $6,02\ 10^{23}$ partículas/mol
La velocidad de la luz en el vacío es $2,9979\ 10^{8}$ m/s
La longitud de una célula típica es $5\ 10^{-5}$ m
La longitud de onda de la luz amarilla es $5,89\ 10^{-7}$ m

9.6.1. Producto y cociente de números expresados en notación científica

La notación científica es especialmente práctica a la hora de realizar productos o cocientes de números expresados de esta forma, ya que se opera por un lado con los coeficientes (realizando la operación adecuada) y por otro lado con las potencias de 10 (utilizando las propiedades de la potencia).

$$4,3\ 10^{3} \cdot 2\ 10^{5} = 8,6\ 10^{8} \qquad \frac{8,1\ 10^{-6}}{3\ 10^{2}} = 2,7\ 10^{-8}$$

9.6.2. Suma y resta de números expresados en notación científica

Exponentes iguales Si se suman números del mismo orden de magnitud:

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 1 y menor que 10 (o mayor que -10 y menor o igual que -1) se mantiene el mismo orden de magnitud

  $$3,2\ 10^{12} + 4,9\ 10^{12} = 8,1\ 10^{12}$$
  $$8,9\ 10^{-10} - 2,7\ 10^{-10} = 7,2\ 10^{-10}$$
  $$-1,4\ 10^{3} - 2,5\ 10^{3} = -3,9\ 10^{3}$$

- Se suman los coeficientes, si la suma es mayor o igual que 10 (o menor o igual que -10 o se encuentra entre -1 y 1), se convierte el coeficiente a notación científica sumando el orden de magnitud del coeficiente al orden de magnitud original.

  $$3,2\ 10^{12} + 8,9\ 10^{12} = 12,1\ 10^{12} = 1,21\ 10^{1}\ 10^{12} = 1,21\ 10^{13}$$
  $$5,2\ 10^{-3} - 6\ 10^{-3} = -0,8\ 10^{-3} = -8\ 10^{-1}\ 10^{-3} = -8\ 10^{-4}$$

Exponentes distintos Se expresan los números con el orden de magnitud mayor y se suman los coeficientes como en los casos anteriores.

$4\ 10^6 + 3\ 10^8 = 0,04\ 10^8 + 3\ 10^8 = 3,04\ 10^8$
$5\ 10^{-7} - 4\ 10^{-8} = 5\ 10^{-7} - 0,4\ 10^{-7} = 4,6\ 10^{-7}$
$3,2\ 10^{-7} - 5,9\ 10^{-5} = 0,032\ 10^{-5} - 5,9\ 10^{-5} = -5,868\ 10^{-5}$
$9,9\ 10^5 + 3\ 10^4 = 9,9\ 10^5 + 0,3\ 10^5 = 10,2\ 10^5 = 1,02\ 10^6$

9.6.3. Prefijos

Los prefijos del Sistema Internacional (SI) se usan para nombrar a los múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad, ya sean unidades básicas o derivadas. Estos prefijos se anteponen al nombre de la unidad para indicar el múltiplo o submúltiplo decimal de la misma. Los símbolos de los prefijos se anteponen a los símbolos de las unidades.

Los prefijos pertenecientes al SI los fija oficialmente la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures), de acuerdo con el cuadro siguiente:

Potencias positivas de 10

Múltip
submú
de uni

Factor que multiplica a la unidad	Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
1000000000000000000000000	10^{24}	yotta	*Y*
1000000000000000000000	10^{21}	zetta	*Z*
1000000000000000000	10^{18}	exa	*E*
1000000000000000	10^{15}	peta	*P*
1000000000000	10^{12}	tera	*T*
1000000000	10^{9}	giga	*G*
1000000	10^{6}	mega	*M*
1000	10^{3}	kilo	*k*
100	10^{2}	hecto	*h*
10	10^{1}	deca	*da*

Potencias negativas de 10

Factor que multiplica a la unidad	Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
$0,1$	10^{-1}	deci	*d*
$0,01$	10^{-2}	centi	*c*
$0,001$	10^{-3}	mili	*m*
$0,000001$	10^{-6}	micro	μ
$0,000000001$	10^{-9}	nano	*n*
$0,000000000001$	10^{-12}	pico	*p*
$0,000000000000001$	10^{-15}	femto	*f*
$0,000000000000000001$	10^{-18}	ato	*a*
$0,000000000000000000001$	10^{-21}	zepto	*z*
$0,000000000000000000000001$	10^{-24}	yocto	*y*

Ejemplos:

Masa de la tierra: $5,98\ 10^{27}\ g$ o utilizando el prefijo yotta es $5,98\ 10^{3}\ Yg$

Velocidad de la luz en el vacío: $2,9979\ 10^{8}\ m/s$ o utilizando el prefijo mega es $299,79\ Mm/s$

Longitud de una célula típica: $5\ 10^{-5}\ m$ o utilizando el prefijo micro es $50\ \mu m$

Longitud de onda de la luz amarilla: $5,89\ 10^{-7}\ m$ o utilizando el prefijo nano es $589\ nm$

9.7. Conversión de unidades

A veces suele ser necesario convertir una medida de una unidad a otra. Veremos ahora diferentes formas de realizar estas conversiones de unidades y como trabajar con unidades lineales, cuadráticas y cúbicas.

Conversión de unidades lineales comparando órdenes de magnitud

Unidades lineales Cuando se trata de múltiplos o submúltiplos de una misma unidad lineal (por ejemplo de mm a nm o de ml a cl) una forma de trabajar puede ser comparando los órdenes de magnitud (las potencias de 10) de ambos múltiplos y así obtener una equivalencia entre las mismas.

Supongamos, por ejemplo, que queremos expresar en km una medida de $27\ cm$. Como el prefijo k (kilo) corresponde a 10^3 y en prefijo c (centi) corresponde a 10^{-2}, eso quiere decir que existen 5 órdenes de magnitud de diferencia entre los dos múltiplos. Ahora bien, como k (kilo) es mayo que c (centi), eso quiere decir que $1\ km$ equivale a $10^5\ cm$ (o $1\ cm$ equivale a $10^{-5}\ km$). Por lo tanto:

$$27\ \boldsymbol{cm} = 27\ \mathbf{10^{-5}}\ \boldsymbol{km} = 2,7\ 10^{-4}\ km$$

Conversión de unidades lineales utilizando factores de conversión

Otra forma de trabajar sería utilizando factores de conversión. Este método también requiere conocer una equivalencia entre las dos unidades que se quieren convertir, pero esta vez se multiplicará la medida original por una fracción que tendrá en cuenta dicha equivalencia. El numerador de esta fracción constará de la unidad a la que se quiere llegar y el denominador constará de la unidad de la que se parte, de forma que las unidades se simplifiquen. Utilizando el mismo ejemplo anterior:

$$27\ cm = 27\ \cancel{cm} \cdot \frac{1\ km}{10^5\ \cancel{cm}} = 27\ 10^{-5}\ km = 2,7\ 10^{-4}\ km$$

Este método es de especial utilidad cuando las unidades que se desean convertir no están relacionadas entre sí por potencias de 10 (como por ejemplo de horas a segundos o de pulgadas a cm), o cuando las unidades son combinadas (por ejemplo de km/h a m/s o $\frac{g}{cm\ s}$ a $\frac{kg}{m\ s}$). En este último caso se usará una fracción por cada unidad que se quiera convertir y la posición de las unidades dentro de cada fracción será de forma tal que las unidades originales se cancelen.

Ejemplos:

$45\ s$ a h $\qquad 45\ s = 45\ \cancel{s} \cdot \dfrac{1\ h}{3600\ \cancel{s}} = \dfrac{45}{3600}\ h = 0,0125\ h$

$50\ m/s$ a km/h $\qquad 50\ \dfrac{m}{s} = 50\ \dfrac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot \dfrac{1\ km}{10^3\ \cancel{m}} \cdot \dfrac{3600\ \cancel{s}}{1\ h} = \dfrac{180000\ km}{10^3\ h} = 180\ \dfrac{km}{h}$

Unidades cuadráticas o cúbicas Cuando se trate de unidades cuadráticas o cúbicas se hará la conversión de la unidad lineal (con alguno de los métodos explicados anteriormente) y se elevará a la potencia adecuada.

Conversión de unidades cuadráticas o cúbicas

Ejemplos:

$5\ cm^2$ a m^2 $\qquad 5\ \boldsymbol{cm}^2 = 5\ \mathbf{(10^{-2}\ \boldsymbol{m})}^2 = 5\ (10^{-2})^2\ m^2 = 5\ 10^{-4}\ m^2$

$3\ m^3$ a mm^3 $\qquad 3\ m^3 = 3\ m^3 \cdot \left(\dfrac{1\ mm}{10^{-3}\ m}\right)^3 = 3\ \cancel{m^3} \cdot \dfrac{1^3\ mm^3}{(10^{-3})^3\ \cancel{m^3}} = 3\ 10^9\ mm^3$

Aclaración: Cuando se tenga que pasar unidades de volumen de dos sistemas de medición distintos (como por ejemplo de l a m^3 o de cm^3 a ml) se hará el pasaje como si las unidades fueran lineales, usando por ejemplo alguna de las siguientes equivalencias:

$$1000\ cm^3 \text{ ——— } 1\ l\ ;\quad 1\ m^3 \text{ ——— } 1000\ l\ ;\quad 1\ cm^3 \text{ ——— } 1\ ml\ ;\quad 1\ dm^3 \text{ ——— } 1\ l$$

Ejemplos:

$50\ l$ a m^3 $\qquad 50\ l = 50\ \cancel{l} \cdot \dfrac{1\ m^3}{1000\ \cancel{l}} = 0,05\ m^3$

$300\ cm^3$ a cl $\qquad 300\ \boldsymbol{cm^3} = 300\ \boldsymbol{ml} = 300\ \cancel{ml} \cdot \dfrac{1\ cl}{10\ \cancel{ml}} = 30\ cl$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Escribir en notación científica los siguientes números

a) 2000	b) 50000	c) 30000000	d) 0,12	e) 0,00015
f) 2324	g) 240000	h) 0,004	i) 234	j) 0,00444
k) 12,22	l) 12	m) 0,0003	n) −23	ñ) −0,0000045
o) 1,0005	p) 289,6	q) 0,2	r) −0,51	s) 0,03004

2. Realizar las siguientes operaciones, expresar el resultado en notación científica

a) $10\ 10^3$	b) $3\ 10^4/10^2$	c) $4\ 10^{-2}/2\ 10^{-8}$
d) $10^4 + 10^3$	e) $10^4 10^4$	f) $10\ (10^3 + 10^5)$
g) $10^2 10^5 10^3$	h) $12\ 10^5/3000$	i) $34\ 10^5\ 2\ 10^{-4}$
j) $-5,3\ 10^{14} - 4\ 10^{12}$	k) $(0,0003\ 10^3 + 2\ 10^{-1})^3$	l) $21\ 10^3\ 2\ 10^{-3}$

3. Realizar las operaciones del inciso anterior utilizando la calculadora

4. Realizar las siguientes conversiones de unidades

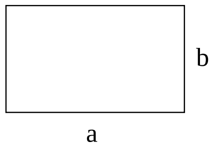
a) 2,3 cm a m	b) 25 mm a m	c) 325 cm a dm
d) 2 10^4 m a km	e) 16 μm a m	f) 250 km a m
g) 455 kg a hg	h) 14 mg a μg	i) 8 ng a μg
j) 3,5 Mg a μg	k) 789 kg a cg	l) 5,5 dg a hg
m) 7,9 10^{-8} Gs a ms	n) 0,14 ks a cs	ñ) 48 μs a Ts

5. Realizar las siguientes conversiones de unidades

a) 28 cm^2 a m^2	b) 5 m^2 a cm^2	c) 625 cm^2 a dm^2
d) 12 10^4 m^2 a km^2	e) 81 μm^2 a m^2	f) 50 km^2 a m^2
g) 5 m^3 a cm^3	h) 1000 cm^3 a mm^3	i) 18 nm^3 a m^3
j) 8,5 km^3 a cm^3	k) 7 dm^3 a cm^3	l) 4,2 m^3 a l
m) 2,9 10^2 mm^3 a l	n) 300 l a m^3	ñ) 400 ml a m^3
o) 2400 kg/m^3 a g/cm^3	p) 72 km/h a m/s	q) 75 m/s a km/h

Anexo: Perímetros, áreas y volúmenes

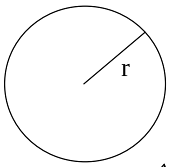
Perímetros, áreas y volúmenes de algunos objetos geométricos básicos:



Rectángulo

Área $A = a\,b$

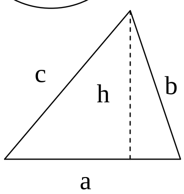
Perímetro $P = 2a + 2b$



Circunferencia

Área $A = \pi\, r^2$

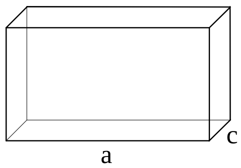
Perímetro $P = 2\pi\, r$



Triángulo

Área $A = (ah) / 2$

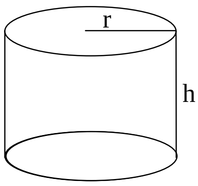
Perímetro $P = a + b + c$



Paralelepípedo rectangular recto

Área exterior $A = 2ab + 2ac + 2bc$

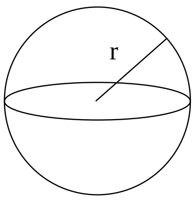
Volumen $V = abc$



Cilindro

Área exterior $A = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$

Volumen $V = \pi\, r^2\, h$

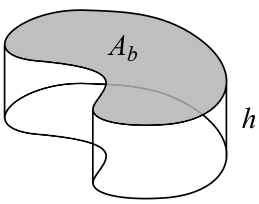


Esfera

Área exterior $A = 4\pi\, r^2$

Volumen $V = 4/3\, \pi\, r^3$

Aclaración: El **volumen** V **de un cuerpo de sección transversal constante** en toda su altura se puede calcular fácilmente como el **producto del área de la base** A_b **por su altura** h



$$\boxed{\boldsymbol{V = A_b \cdot h}}$$

Ejercicios

Resolver sin usar calculadora, excepto que se aclare lo contrario

1. Resolver los siguientes problemas

   a) Hallar el área de un triángulo cuya base es de 1,5 m y su altura es de 4 m.

   b) ¿Cuál es el radio de una circunferencia de 5π cm de perímetro?

   c) ¿Cuánto vale el perímetro de un cuadrado cuya área es de 9 m^2?

   d) Hallar el volumen de una caja de 2 dm de largo, 10 cm de ancho y 0,12 m de alto.

   e) ¿Qué altura tiene una caja de 3 l de capacidad, cuya base mide 20 cm por 15 cm?

   f) ¿Cuántos m^3 de tierra hay en los primeros 5 cm de suelo de un terreno de 100 hectáreas (1 hectárea = 1 hm^2)?

   g) ¿Qué superficie tendrá la base de un bloque de hielo de 10 cm de espesor, cuyo volumen es de 2 m^3?

   h) ¿Cuántos litros de agua caen en un terreno de 2000 m^2 de superficie durante una lluvia en la que caen 15 mm de agua?

2. Resolver los siguientes ejercicios utilizando la calculadora

   a) Hallar el perímetro de una circunferencia de radio 10 cm. Expresarlo en m utilizando la notación científica.

   b) Hallar el área del circulo que encierra la circunferencia anterior. Expresarla en m^2.

   c) ¿Cuántos litros de agua recolecta un tanque australiano de 5 m de diámetro durante una precipitación de 20 mm?

   d) Hallar la arista de un cubo cuyo volumen es de 27 cm^3.

   e) Hallar la superficie exterior del cubo anterior. Expresarlo en m^2.

   f) Calcular la altura de un cilindro, en m, si su superficie exterior es de 2 m^2 y el radio de su base es de 20 cm.

   g) Hallar el volumen del espacio comprendido entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 6$ cm y $r_2 = 9$ cm. Expresarlo en m^3 utilizando la notación científica.

   h) Dos cilindros coaxiales tienen una altura igual a 2 m y los radios de 3 mm y 6 mm. Calcular, en cm^3, el volumen comprendido entre los dos cilindros.

Resultados

1. Conjuntos numéricos y Operaciones elementales

1. a) 119 b) 26 c) 20 d) 104 e) $4 \cdot 3^{13}$ f) $4 \cdot 5^4$

2. a) $8 = 2^3$ $\quad 14 = 2 \cdot 7$ $\quad 49 = 7^2$ $\quad \text{MCM}(8, 14, 49) = 2^3 \cdot 7^2 = 392$

   b) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad 25 = 5^2$ $\quad \text{MCM}(30, 24, 25) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$

   c) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 80 = 2^4 \cdot 5$ $\quad \text{MCM}(120, 80) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

3. a) -6 b) 12 c) 6 d) 33 e) 124 f) $2^7 \cdot 3^10$

4. a) -1 b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{11}{24}$ d) $\frac{11}{3}$ e) $\frac{76}{315}$ f) $\frac{93}{40}$ g) $-\frac{8}{3}$

5. a) 1 b) 1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{120}$

6. a) 6^7 b) 8 c) $\frac{1}{b^5}$ d) $15x^2$ e) $4x$ f) $\frac{1}{49}$

   g) 4^{11} h) a^9 i) $-3h^{12}$ j) $-\frac{7}{4}k^{20}\, z$ k) $\frac{4\, v^8}{25\, a^3}$

7. a) $-\frac{7}{6}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $6|b|$ d) -2 e) c f) 3

   g) -3 h) -3 i) $\frac{3\, y \sqrt[3]{y^2}}{7\, x}$ j) $\frac{|y|}{2|a|}$ k) $\frac{2|z|^7}{3|w|}$ l) $\frac{1}{3}\, a \sqrt[3]{u^2}$

   m) $2^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$ n) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

8. a) $\frac{1}{10}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 1

2. Ecuaciones lineales

1. a) $x = \frac{11}{3}$ b) $x = \frac{2}{11}$ c) $x = \frac{2}{5}$ d) No tiene solución

   e) $x = -1$ f) Infinitas soluciones g) $x = \frac{23}{3}$

2. a) $a = -\dfrac{1}{3}$

   b) El número es 75.

   c) El número es $-\dfrac{15}{4}$.

   d) Deberán transcurrir 2 años.

   e) El salario antes del aumento era de \$ 12000.

   f) El precio original de las zapatillas era de \$ 1400.

3. Ecuaciones de segundo grado

1. a) $x_1 = -2 + \sqrt{2} \quad x_2 = -2 - \sqrt{2}$
   b) $x_1 = 13 \quad x_2 = 3$
   c) $x_1 = 5 + 2\sqrt{10} \quad x_2 = 5 - 2\sqrt{10}$

2. a) $x_1 = 10 \quad x_2 = -7$
   b) $x_1 = -1 + \sqrt{13} \quad x_2 = -1 - \sqrt{13}$
   c) No tiene solución en $\mathbb{R}$
   d) $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$
   e) $x_1 = 0 \quad x_2 = \dfrac{9}{4}$
   f) $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
   g) $x = 3$

3. a) Los números son 0 y -1.
   b) El número es 5.
   c) Los números son 0 y 24.
   d) Los lados del rectángulo miden 9 cm y 12 cm.
   e) La altura del triángulo es de 12 cm.
   f) Los números son 5 y -6.
   g) Los números son 4, 5 y 6.

4. Polinomios

1. a) $-2x^2 + 2x + 2$
   b) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 7$
   c) $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 10x - 5$
   d) $x^3 + 5x^2 - 2$
   e) $x^2 + x - 12$
   f) $x^5 + 4x^4 + 4x^3$
   g) $x^7 + 2x^4 - 4x^3 - 8$
   h) $3x^6 + 8x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 2x$

2. a) $C(x) = 3x - 4 \qquad R(x) = 8x^2 - 5x - 1$
   b) $C(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 36x + 149 \qquad R(x) = -602$
   c) $C(x) = 3 \qquad R(x) = 2x^3 - 5x + 11$
   d) $C(x) = x^2 - 2x + 4 \qquad R(x) = -8x - 4$
   e) $C(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x + 23 \qquad R(x) = 63$
   f) $C(x) = x^2 - 7 \qquad R(x) = -2x^2 + 5x + 8$
   g) $C(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27 \qquad R(x) = 77$
   h) $C(x) = -3x + 12 \qquad R(x) = -46$

3. a) 3 b) -10 c) 0 d) 5 e) 77

4. Se pueden calcular los restos de los incisos b), e), g) y h). Ver respuestas del inciso 2.

5. Calcular las raíces reales de los siguientes polinomios

   a) $a = 8$ b) $a = -15$ c) $a_1 = 1 \quad a_2 = -\dfrac{1}{2}$
   d) $a_1 = 2 \quad a_2 = -2$ e) No tiene raíces reales f) $a = -2$

5. Factorización de expresiones algebraicas

1. a) $2x(x + 2y - 3x^2)$ b) $3xy(2x - 3xy + 4)$ c) $6u^2a^2(2u^3+3a-4ua^2)$
   d) $2t^2(1 + 50t)$ e) $z^2y^2(x^3 - x^2y - xy^2z + z^2y)$

2. a) $(x + 4)(x + y)$ b) $(y - 2)(xy + z)$ c) $(x^2 - x + 1)(x^2 + y)$
   d) $(2x - z)(y + u)$ e) $(x^3 - x^2 - 1)(y - 1)$

3. a) $(x + y)^2$ b) No es Trinomio Cuadrado Perfecto c) $(a + 4)^2$
   d) No es TCP e) $(6 + y)^2$ f) $(x - y)^2$ g) No es TCP
   h) $(d - 4)^2$ i) $(z - y)^2$ j) $(6 - t)^2$

4. a) $(x - 2)^3$ b) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^3$ c) $(x^3 - 1)^3$ d) $\left(x^2 + \dfrac{1}{3}\right)^3$

5. a) $(x - 10)(x + 10)$ b) $\left(x - \dfrac{1}{6}\right)\left(x + \dfrac{1}{6}\right)$ c) $(2x - 5)(2x + 5)$
   d) $(t^2 - 2)(t^2 + 2)$ e) $(h^4 - 8)(h^4 + 8)$

6. a) $(x+3)(x^2-3x+9)$ b) $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$

   c) $(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)$ d) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(27x^2+9x+3)$

   e) $(z-5)(z+5)$ f) $(t+3)(t-2)$ g) $(x+1)(x^2+x-6)$

7. a) $(x+1)(x-4)$ b) $-2(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ c) $-(x+2)^2$

   d) $3(x-2)(x+1)$

8. a) $8(x+y)^2$ b) $h(a-b)^2$ c) $(d-4)(d-3)$

   d) $z(z-y)^2$ e) $ac^2(6-c)^2$ f) $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

   g) $(x-1)(x+1)(x^3+1)$ h) $3x(x-1)^3$ i) $(x^2+1)(x^3+1)$

   j) $x^2(x+1)(x+2)$ k) $(x-1)(x+1)(x+2)$ l) $(x-3)(x+2)(x-1)$

9. a) $\dfrac{2}{x}$ (si $x \neq 0$) b) $\dfrac{2}{4b+1}$ (si $b \neq 0$)

   c) $\dfrac{y}{x+y}$ (si $x \neq y$) d) $\dfrac{3+x}{3-x}$ (si $x \neq -3$)

10. a) $\dfrac{3}{x}$ (si $x \neq 2$) b) $\dfrac{7}{(x-1)(x+5)}$ (si $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$)

    c) $\dfrac{1}{x(x-5)}$ (si $x \neq 6$ y $x \neq -5$) d) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (si $x \neq -1$)

    e) $\dfrac{1}{y-1}$ (si $y \neq 1$ e $y \neq -1$) f) $\dfrac{(y-2)(y+2)}{(y-3)^2}$ (si $y \neq -3$)

    g) $-\dfrac{x+7}{x-1}$ (si $x \neq 7$ y $x \neq -1$) h) $z+2$ (si $x \neq 0$, $z \neq 2$ y $z \neq -2$)

11. a) $\dfrac{-4}{(x+2)(x-2)}$ b) $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$

    c) $\dfrac{(y-1)(y+6)}{(y-3)^2(y+3)}$ d) $2(x-1)$ (si $x \neq 0$ y $x \neq -1$)

    e) $\dfrac{2z-1}{z}$ (si $z \neq -1$) f) -1 (si $y \neq 2$ e $y \neq -2$)

6. Sistemas de ecuaciones lineales

1.
   a) $(1\,,2)$ b) $\left(\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{2}\right)$ c) El sistema no tiene solución

   d) $(3\alpha+2\,,\alpha)$ para cualquier α real ó $\left(\alpha\,,\frac{\alpha-2}{3}\right)$ para cualquier α real

2.
   a) Los números son 17 y 11.

   b) La botella cuesta \$42 y el corcho \$3.

   c) Los ángulos miden 108° y 20°.

   d) Los números son 18 y 24.

   e) En el corral hay 16 pollos y 7 cabritos.

   f) Los zapatos cuestan \$1800 y la corbata \$600.

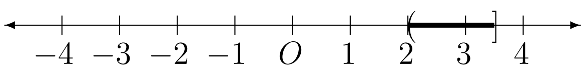
   g) Los números son 13 y 4.

   h) Se obtienen 5 billetes de \$10 y 19 de \$50.

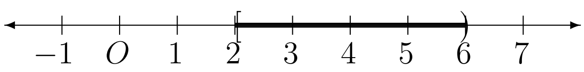
   i) Se deben separar en una parte de $45\,g$ y otra de $25\,g$.

7. Conjuntos en la recta y el plano coordenado

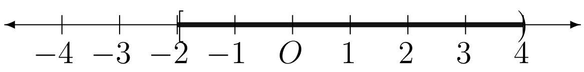
1.

a) 

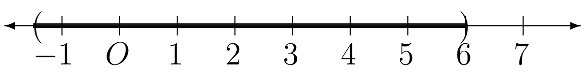
(2 , 3,5]

b) 

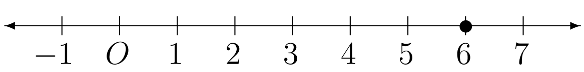
[2 , 6)

c) 

[-2 , 4)

d) 

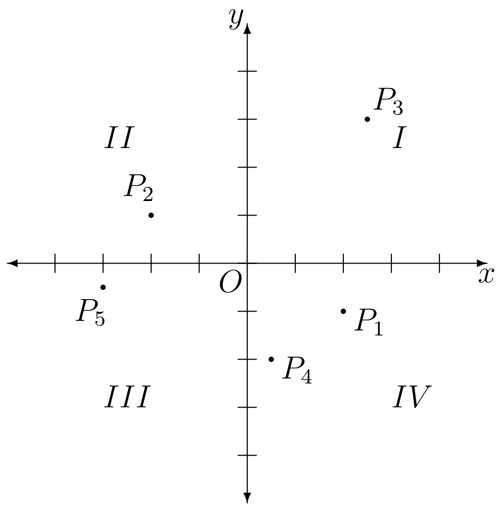
(-1,5 , 6)

e) 

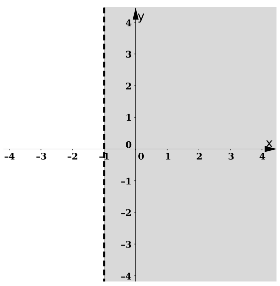
f) 

$(\ -\infty\ ,\ 0\ )\cup(\ 0\ ,\ \infty\ )$

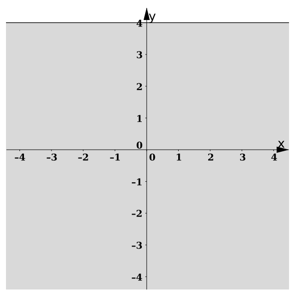
2.



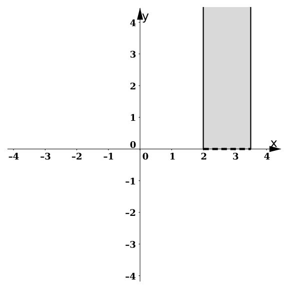
3. a)



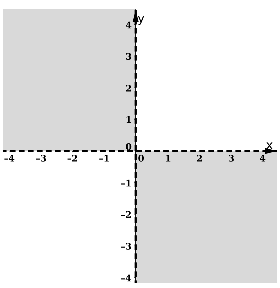
b)



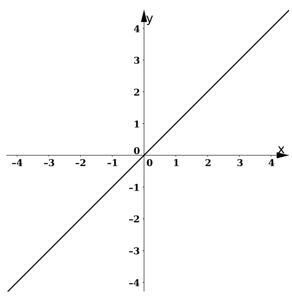
c)



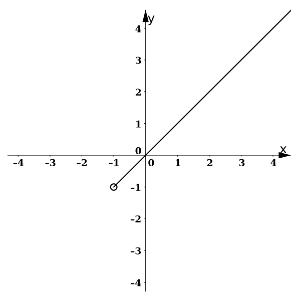
d)



e)



f)



4.

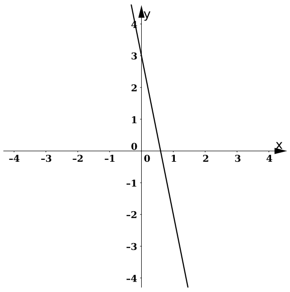
a) $y = x + 1$ b) $y = \frac{4}{3}x - 1$ c) $y = -1$ d) $x = -1$

e) $y = \frac{1}{2}x$ f) $y = -x$

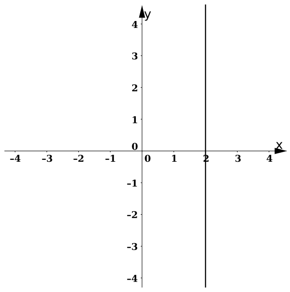
5.

a) $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$ c) Q_3

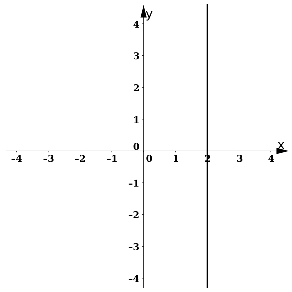
6. a)



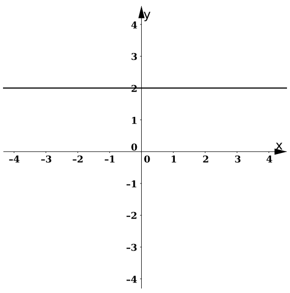
b)



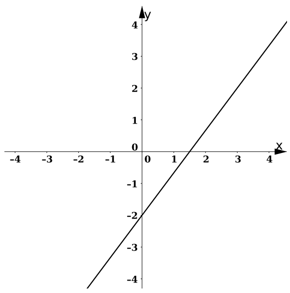
c)



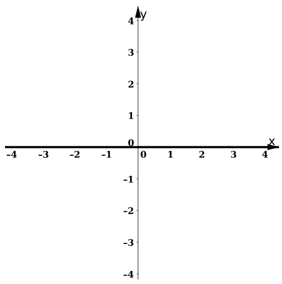
d)



e)

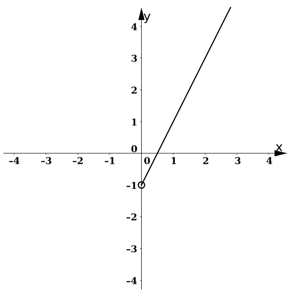


f)

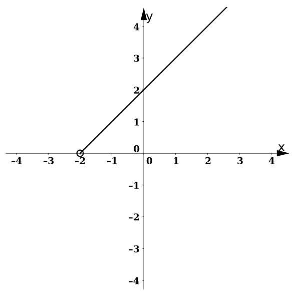


7. a) $k = \dfrac{2}{3}$ b) $k = -\dfrac{2}{3}$

8. a)



b)



9. a) Int. eje x: $\left(\dfrac{5}{2}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,-10\,)$

b) Int. eje x: $\left(-\dfrac{8}{3}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,-8\,)$

c) Int. eje x: $(\,2\,,\,0\,)$ Int. eje y: No tiene

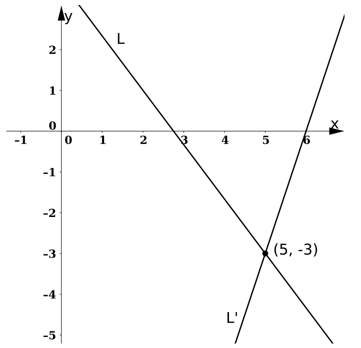
d) Int. eje x: $(\,3\,,\,0\,)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,3\,)$

e) Int. eje x: No tiene Int. eje y: $(\,0\,,\,-1\,)$

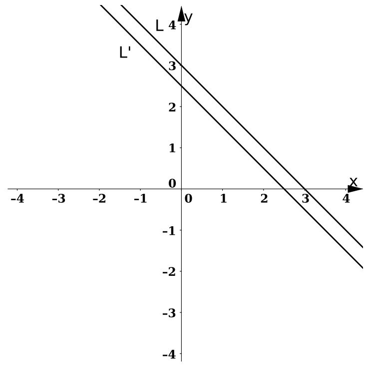
f) Int. eje x: $\left(\dfrac{5}{2}\,,\,0\right)$ Int. eje y: $(\,0\,,\,5\,)$

10.

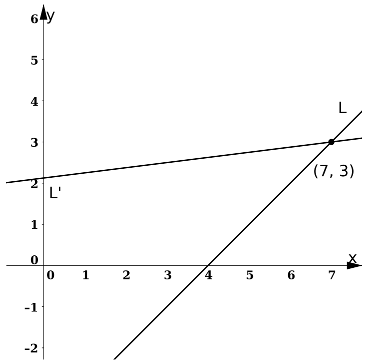
a) Transversales



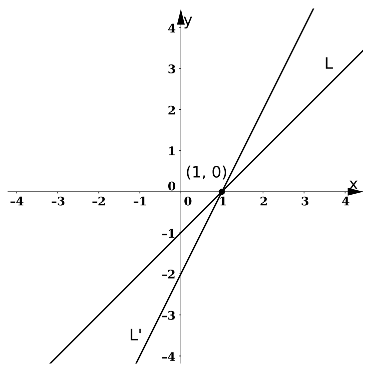
b) Paralelas



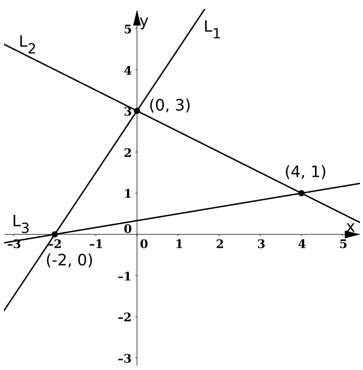
c) Transversales



d) Transversales



11.



8. Logaritmos

1. a) 8 b) 4 c) -1 d) -3 e) -1 f) $\frac{1}{2}$ g) -3 h) -1

   i) 0 j) -2 k) -2 l) -1

2. a) -3 b) -1 c) 3 d) 45 e) $-\frac{13}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) $\frac{17}{20}$ h) $-\frac{9}{2}$

3. a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$

4. a) $\approx 3,3$ b) $\approx 4,7$ c) $\approx 7,5$ d) $\approx -0,9$ e) $\approx -3,8$

5. Ver 1.

6. Ver 1.

7. a) $x = 500$ b) $x = \frac{25}{4}$ c) $x = 15$ d) $x_1 = 2$ $x_2 = -5$

   e) $x = 4$ f) $x = 15$ g) $x = 10^{1000}$ h) $x = 4$

8. a) $x = 6$ b) $x = \frac{8}{9}$ c) $x = -6$ d) $x = 2$ e) $x = 7$ f) $x = \frac{1}{3}$

9. Trigonometría

1. a) La hipotenusa mide 5 cm.

   b) Los catetos miden $3\sqrt{5}$ cm y $6\sqrt{5}$ cm.

   c) El cateto menor mide 2.

   d) El área del triángulo es de $25\sqrt{3}$ cm^2.

2. a) El cateto mide $\approx 11,3$ m.

   b) La diagonal del cuadrado mide $\approx 12,7$ m.

   c) El lado del cuadrado mide $\approx 1,06$ km.

   d) Camina $\approx 7,8$ cuadras.

3.
   a) La hipotenusa mide 10.

   b) El cateto mide $4\sqrt{2}$.

   c) El coseno del ángulo vale $\frac{4}{7}$.

   d) El coseno del ángulo vale $\frac{3}{5}$.

   e) El ángulo vale 30°.

   f) La tangente del ángulo vale $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

4.
   a) I) $b \approx 19,204 \quad h \approx 22,645 \quad \beta = 58°$

   II) $b \approx 20,808 \quad a \approx 18,736 \quad \beta = 48°$

   III) $h \approx 37,696 \quad \alpha \approx 21°48'5'' \quad \beta \approx 68°11'55''$

   IV) $b \approx 112,076 \quad \alpha \approx 39°22'54'' \quad \beta \approx 50°37'6''$

   b) La pista deberá terminar $\approx 87,19\ m$ antes de la arboleda.

   c) En ese tiempo su altura sobre el nivel del mar varía $\approx 523,5\ m$.

   d) El árbol mide $\approx 9,74\ m$.

5.
   a) El lado mide $2\sqrt{2}$.

   b) El otro lado mide $\sqrt{19}$.

   c) Los ángulos miden 30°, 30° y 120°.

   d) El ángulo mide 45°.

6.
   a) I) $\alpha \approx 56°22' \quad \beta \approx 45°14'51'' \quad \gamma \approx 78°23'9''$

   II) $b \approx 15,91 \quad c \approx 7,79 \quad \alpha = 69°$

   III) $c \approx 8,19 \quad \alpha \approx 47°47' \quad \beta \approx 72°13'$

   b) El área es $\approx 12,28\ cm^2$.

   c) $AC \approx 4,34\ cm$ y $BC \approx 8,68\ cm$.

   d) El lado mide $\approx 16,22$.

   e) El ángulo mide $\approx 34°19'$.

Anexo: Notación científica y Conversión de unidades

1. a) $2\ 10^3$ b) $5\ 10^4$ c) $3\ 10^7$ d) $1,2\ 10^{-1}$ e) $1,5\ 10^{-4}$
   f) $2,324\ 10^3$ g) $2,4\ 10^5$ h) $4\ 10^{-3}$ i) $2,34\ 10^2$ j) $4,44\ 10^{-3}$
   k) $1,222\ 10^1$ l) $1,2\ 10^1$ m) $3\ 10^{-4}$ n) $-2,3\ 10^1$ ñ) $-4,5\ 10^{-6}$
   o) $1,0005\ 10^0$ p) $2,896\ 10^2$ q) $2\ 10^{-1}$ r) $-5,1\ 10^{-1}$ s) $3,004\ 10^{-2}$

2. a) 10^4 b) $3\ 10^2$ c) $2\ 10^6$ d) $1,1\ 10^4$ e) 10^8
   f) $1,01\ 10^6$ g) 10^{10} h) $4\ 10^2$ i) $6,8\ 10^2$ j) $-5,34\ 10^{14}$
   k) $1,25\ 10^{-1}$ l) $4,2\ 10$

3. Idem anterior

4. a) $0,023\,m = 2,3\ 10^{-2}\,m$
   b) $25\ 10^{-3}\,m = 2,5\ 10^{-2}\,m$
   c) $325\ 10^{-1}\,dm = 3,25\ 10\,dm$
   d) $20\,km = 2\ 10\,km$
   e) $16\ 10^{-6}\,m = 1,6\ 10^{-5}\,m$
   f) $250\ 10^3\,m = 2,5\ 10^5\,m$
   g) $455\ 10\,hg = 4,55\ 10^3\,hg$
   h) $14\ 10^3\,\mu g = 1,4\ 10^4\,\mu g$
   i) $8\ 10^{-3}\,\mu g$
   j) $3,5\ 10^{12}\,\mu g$
   k) $789\ 10^5\,cg = 7,89\ 10^7\,cg$
   l) $5,5\ 10^{-3}\,hg$
   m) $7,9\ 10^4\,ms$
   n) $0,14\ 10^5\,cs$
   ñ) $48\ 10^-18\,Ts = 4,8\ 10^-17\,Ts$

5. a) $28\ 10^{-4}\,m^2 = 2,8\ 10^{-3}\,m^2$
   b) $5\ 10^4\,cm^2$
   c) $625\ 10^{-2}\,dm^2 = 6,25\,dm^2$
   d) $12\ 10^{-2}\,km^2 = 1,2\ 10^{-1}\,km^2$
   e) $81\ 10^{-12}\,m^2 = 8,1\ 10^{-11}\,m^2$
   f) $50\ 10^6\,m^2 = 5\ 10^7\,m^2$
   g) $5\ 10^6\,cm^3$
   h) $1000\ 10^3\,mm^3 = 10^6\,mm^3$
   i) $18\ 10^{-27}\,m^3 = 1,8\ 10^{-26}\,m^3$
   j) $8,5\ 10^{15}\,cm^3$
   k) $7\ 10^3\,cm^3$
   l) $4200\,l = 4,2\ 10^3\,l$
   m) $2,9\ 10^{-4}\,l$
   n) $0,3\,m^3$
   ñ) $400\ 10^{-6}\,m^3 = 4\ 10^{-4}\,m^3$
   o) $2,4\,\frac{g}{cm^3}$
   p) $20\,\frac{m}{s}$
   q) $270\,\frac{km}{h}$

Anexo: Perímetros, áreas y volúmenes

1. Resolver los siguientes problemas

   a) El área es de 3 m^2.

   b) El radio es de $2,5$ cm.

   c) El perímetro vale 12 m.

   d) El volumen es de 2400 cm^3.

   e) La altura de la caja es de 10 cm.

   f) Hay 50000 m^3 de tierra.

   g) La superficie de la base será 20 m^2.

   h) Caen 30000 l de agua sobre el terreno.

2. a) El perímetro es de $\approx 6,283\ 10^{-1}$ m

   b) El área es de $\approx 3,14\ 10^{-2}$ m^2.

   c) Recolecta $\approx 392,7$ l de agua.

   d) La arista mide 3 cm.

   e) La superficie es de $5,4\ 10^{-3}$ m^2.

   f) La altura del cilindro es $\approx 1,39$ m.

   g) El volumen es $\approx 2,15\ 10^{-3}$ m^3.

   h) El volumen es $\approx 169,65$ cm^3.